Department Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani SoSe 2011

Anleitung zu Blatt 7 Komplexe Funktionen

Isolierte Singularitäten, Residuensatz, reelle Integrale,

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Residuenkalkül

Sei f holomorph in einer punktierten Umgebung von z_0 mit der Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{in} \quad \underline{0 < |z - z_0| < r\,.}$$

Dann gilt bekanntlich für jede geschlossene Kurve C mit $\mathrm{Uml}\,(C, z_0) = 1$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz\,.$$

$a_{-1} :=$ **Residuum von f in** $z_0 := Res\, f(z_0) =: Res\,(f; z_0)$

Residuensatz : Seien

$D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet

$f : D \setminus \{z_1, \cdots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph

C geschlossener Weg in $D \setminus \{z_1, \cdots, z_m\}$, nullhomotop in D, stkw. C^1.

Dann gilt

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Uml(C, z_k)\, Resf(z_k)$$

Insbesondere falls C einfach geschlossen, positiv orientiert und $z_1, \cdots, z_m$ innerhalb von C, d.h. $Uml(C, z_k) = 1$

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Resf(z_k)$$

Beispiel : (Skizze der Kurven vor Ort)

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 1} = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

Isolierte Singularitäten : $z_{1,2} = \pm 1 \quad z_{3,4} = \pm i\,.$

$$\oint_{C_1} f(z)dz = -2\pi i Resf(i)$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz = +2\pi i\,[Resf(-i) + Res(-1)]$$

$$\oint_{C_3} f(z)dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{4} Resf(z_k)$$

$$\oint_{C_4} f(z)dz = 4\pi i Resf(1) + 2\pi i\,[Resf(i) + Res(-1)]$$

Rechenregeln für Residuen :

- **Regel 1)** z_0 einfacher Pol : (Zuhalte–Methode)
  $Resf(z_0) \;=\; \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

- **Regel 2)** $f(z) \;=\; \dfrac{p(z)}{q(z)}$, p und q holomorph in einer Umgebung von z_0 ,
  z_0 einfache Nullstelle von q , $p(z_0) \neq 0 \Longrightarrow$
  z_0 ist Pol erster Ordnung von f mit $\quad Resf(z_0) \;=\; \dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

- **Regel 3)** z_0 **Pol m-ter Ordnung)**
  $Resf(z_0) \;=\; \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}$

Beispiel :

$$f(z) \;=\; \frac{z}{z^4 - 1} \;=\; \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)} \;=\; \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

Regel 1 für $z = i$

$$Resf(i) = \lim_{z \to i} ((z-i)f(z)) = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)\; z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

$$= \left. \frac{z}{(z-1)(z+1)(z+i)} \right|_{z=i} \;=\; -\frac{1}{4}$$

Regel 2 für $z = -i$

$$Resf(-i) = \left. \frac{z}{(z^4-1)'} \right|_{z=-i} = \left. \frac{z}{4z^3} \right|_{z=-i} = \frac{1}{4i^2} = -\frac{1}{4}$$

$Resf(-1) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $Resf(1) =$

Faustregel für Pole 1. Ordnung: Regel 1) einfacher falls Nenner nur als Produkt mehrerer Terme vorliegt. Regel 2) einfacher, falls Nenner ausmultipliziert vorliegt.

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz =$$

$$\oint_{|z-(1+i)|=2} f(z) dz =$$

$$\oint_{|z+i|=1} f(z) dz =$$

Kurven : ein mal positiv durchlaufen

Vorsicht : z.B. mit $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(2z-4)}$ gilt $Resf(2) \neq \left.\dfrac{1}{(z-1)}\right|_{z=2}$ **Beispiel zu Regel 3)** $f(z) = \dfrac{z^2-1}{(z-1)^2(z+1)(z-i)^4} =$

Singularitäten :

$$\begin{cases} z_1 = 1 & \text{Pol erster Ordnung} \\ z_2 = i & \text{Pol vierter Ordnung} \\ z_3 = -1 & \text{hebbar} \end{cases}$$

f holomorph in punktierter Umgebug von $z_3 \longrightarrow$ Taylorreihe

$\Longrightarrow \quad Resf(z_3) = 0$

$Resf(1) =$

$$\begin{aligned} Resf(i) &= \frac{1}{3!}\lim_{z\to i}\big((z-i)^4 f(z)\big)''' = \frac{1}{6}\lim_{z\to i}\left((z-i)^4\frac{1}{(z-1)(z-i)^4}\right)''' \\ &= \frac{1}{6}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{z-1}\right)''' = -(z-1)^{-4}\Big|_{z=i} \\ &= -\frac{1}{(i-1)^4} = -\frac{1}{(-2i)^2} = \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Noch ein Beispiel:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1-\cos(z)}{z^4} = \frac{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-+\cdots\right)}{z^4} \\ &= \frac{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}\pm\cdots}{z^4} = \frac{1}{2!}z^{-2}-\frac{1}{4!}z^0+\frac{1}{6!}z^2-+\cdots \end{aligned}$$

Null ist Pol zweiter Ordnung! Natürlich wendet man NICHT Regel 3) an, um Resf(0) zu berechnen. Sondern?

Komplexe Partialbruchzerlegung:

Sei z_0 isolierte Singulartät von f und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurentreihe von f in $\underline{0 < |z - z_0| < r}$

Dann heißt $$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

der zu z_0 gehörige **Hauptteil** von f.

**Eine rationale Funktion, die im ∞ verschwindet,
ist die Summe ihrer Hauptteile!**

Das heißt: Mit $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$,

p und q Polynome mit grad $(p) <$ grad (q)

$z_1, \cdots, z_k$ die Nullstellen von q,

bestimmt man für jedes z_l, $l = 1, \cdots, k$ den Hauptteil

und erhält mit

$$f(z) = h_1(z) + h_2(z) + \cdots + h_k(z)$$

die komplexe Partialbruchzerlegung (PBZ) von f.

<u>**Beispiel :**</u>

$$\tilde{f}(z) = \frac{2z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 4z + 4}{(z+1)^2(z^2+1)}$$

grad (Nenner) $\geq$ grad (zähler) $\longrightarrow$ Ploynomdivision

$$\tilde{f}(z) = \frac{2z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 4z + 4}{(z^2+2z+1)(z^2+1)} = \frac{2z^4 + 4z^3 + 4z^2 + 4z + 4}{z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1}$$

$$= 2 + \frac{2}{z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1} =: 2 + f(z)$$

Singularitäten von f:

$z_1 = -i, \quad z_2 = i$: einfache Pole

$z_3 = -1$: Pol zweiter Ordnung

$\underline{z_1 = -i}$: Hauptteil besteht aus einem Term, nämlich

$$h_1(z) = \frac{Res(f;-i)}{z+i} = \frac{\left(\dfrac{2}{(z-i)(z+1)^2}\right)_{z=-i}}{z+i}$$
$$= \left(\frac{2}{(-2i)(-i+1)^2}\right)\frac{1}{z+i} = -\frac{1/2}{z+i}$$

$\underline{z_2 = i}$: Völlig analog erhält man $h_2(z) = \dfrac{-1/2}{z-i}$

$\underline{z_3 = -1}$: $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}\underbrace{\left(\dfrac{2}{z^2+1}\right)}_{g_3(z)}$

$g_3(z)$ ist holomorph nahe $z_3 = -1$, also in eine Taylorreihe entwickelbar:

$g_3(z) = g_3(-1) + g_3'(-1)(z+1) + \frac{1}{2}g_3''(-1)(z+1)^2 + \cdots$

$f(z) = \dfrac{g_3(-1)}{(z+1)^2} + \dfrac{g_3'(-1)}{(z+1)} + \frac{1}{2}g_3''(-1) +$ positive Potenzen

$h_3(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} - \left(\dfrac{4z}{(z^2+1)^2}\bigg|_{z=-1}\right)\cdot\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{(z+1)^2}$

Komplexe PBZ :

$$f(z) = h_1(z) + h_2(z) + h_3(z) = \frac{-1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}$$

Reelle Partialbruchzerlegung = ?

Uneigentliche Integrale

Satz A) Sei $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

D Gebiet mit $H \subset D$.

f holomorph in $D \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$

$\{z_1, \cdots, z_n\} \subset H \setminus \mathbb{R}$

(d.h. keine Singularitäten in $\mathbb{R}$,)

$\lim\limits_{z\to\infty} z \cdot f(z) = 0$ glm. in H.

(z.B. r(z) = p(z)/q(z) mit grad q $\geq$ grad p +2)

Dann gilt $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Resf(z_k)$$

Beispiel 1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}\, dx$$

Satz nicht anwendbar! Sinularität in $z = 2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2) $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)}\, dx$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)(z-i)}$$

Singularitäten in der oberen Halbebene : $z_1 = i, z_2 = 2i$

$$I = 2\pi i\,(Resf(i) + Resf(2i))$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+i)}\bigg|_{z=i} + \frac{1}{(z+2i)(z-i)(z+i)}\bigg|_{z=2i} \right)$$

Satz B) Fast alle Voraussetzungen wie in Satz a).

Insbesondere : endlich viele Singularitäten in $H \setminus \mathbb{R}$

Anders als in A :

$\lim_{z\to\infty, y\geq 0} f(z) = 0$ wobei $z = x + iy$.

(Z.B. : f(z)= p(z)/q(z), Grad (q) $>$ Grad (p))

Dann gilt für $\omega > 0$

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \;=\; 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\left(e^{i\omega z}f; z_k\right)$$

Bemerkungen : für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $\cos(\omega x)f(x) = \text{Re}\ (e^{i\omega x}f(x))$
- $\sin(\omega x)f(x) = \text{Im}\ (e^{i\omega x}f(x))$
- Anwendung in der Fouriertransformation
- Eigenschaften gerader/ungerader Fkt'n beachten:

  g ungerade $\implies \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$

  g gerade $\implies \int_{0}^{\infty} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$

Beispiel 3) $I_3 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^4 + 2x^2 + 8}dx$

Nenner $\neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

zwei Nennernullstellen z_1, z_2 in H^+ ,

Satz anwendbar mit

$$I_3 = \text{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{iz}dz\right) =$$

$$= \text{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{2} Res\left(e^{iz}f; z_k\right)\right)$$

Rechnung ist aber nicht nötig!!!

Beispiel 4)

$$I_4 := \int_0^\infty \frac{x^3 \sin(x)}{x^6+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{z^3 e^{iz}}{z^6+1} dz \right)$$

Singularitäten in $z^6 = e^{i\pi}$, also

$z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6})} \qquad k = 0, \cdots, 5$

In der oberen Halbebene : $\quad z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}},\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}},$

$$I_4 = \tfrac{1}{2} \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=0}^{2} Res \left(e^{iz} \frac{z^3}{1+z^6}; z_k \right) \right)$$

$$= \pi \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{2} \left. \frac{e^{iz} z^3}{6z^5} \right|_{z=z_k} \right) = \tfrac{\pi}{6} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{2} \frac{e^{iz_k}}{z_k^2} \right)$$

Satz C) Voraussetzungen : $R(x) = P(x)/Q(x)$, P und Q Polynome mit Grad $(P) <$ Grad (Q), Polstellen z_k nicht in $[0, \infty)$, $0 < \alpha < 1$. Dann gilt

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \neq 0} Res \left(\frac{R(z)}{z^\alpha}; z_k \right)$$

Beispiel 5

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{x^{4/3} + x^{1/3}}{x^3 - x^2 + 3x + 5} dx = \int_0^\infty \frac{x^2 + x}{x^{2/3}(x+1)(x^2 - 2x + 5)} dx$$

$$I := \int_0^\infty \frac{z}{z^{2/3}(z-(1-2i))(z-(1+2i))} dz$$

$$Res \left(\frac{z}{z^{2/3}(z-(1-2i))(z-(1+2i))}; 1+2i \right)$$

$$= Res \left(\frac{z^{1/3}}{(z-(1-2i))(z-(1+2i))}; 1+2i \right)$$

$$= \left. \frac{z^{1/3}}{z - 1 + 2i} \right|_{z=1+2i} = \frac{(1+2i)^{1/3}}{4i}$$

analog : Koeff'n reell !

$$Res \left(\frac{z}{z^{2/3}(z-(1-2i))(z-(1+2i))}; 1-2i \right) = \frac{(1-2i)^{1/3}}{-4i}$$

Also

$$I_5 = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \left[\frac{1}{4i} \left((1+2i)^{1/3} - (1-2i)^{1/3} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2 - 2e^{-4\pi i/3}} \left((1+2i)^{1/3} - (1-2i)^{1/3} \right) = \cdots$$

ACHTUNG : Im letzten Satz ist $z = re^{i\phi}$ mit $\phi \in [0, 2\pi)$!!!!

Beispiel 6 :

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^3+1)}dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)(x^2-x+1)}dx$$

Sing'n : $z_1 = -1,\qquad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\pi/3}$ und

$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i5\pi/3}$ **NICHT** wie sonst $e^{-i\pi/3}$

$$Res(\tfrac{1}{\sqrt{z}}f(z); z_3) = \frac{1}{(\sqrt{z})(1+z^3)'}\bigg|_{z=e^{i5\pi/3}} = \cdots = \tfrac{1}{3}e^{-i\pi/6} =: R_3$$

Analog

$Res(\frac{1}{\sqrt{z}}f(z); z_2) = \frac{1}{3}e^{-i5\pi/6} =: R_2$

$Res(\frac{1}{\sqrt{z}}f(z); z_1) = -\frac{i}{3} =: R_1$

Also

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^3+1)}dx = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi\frac{1}{2}i}}(R_1+R_2+R_3)$$

$$= \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}}\left[-\tfrac{i}{3} + \tfrac{1}{3}(\cos(\pi/6) - i\sin(\pi/6) + \cos(5\pi/6) - i\sin(5\pi/6))\right]$$

$$= \frac{\pi i}{3}(-i - 2i\sin(\pi/6) = \frac{-2\pi i^2}{3} = \frac{2\pi}{3} \in \mathbb{R}\,!!!$$

Kleine Übersicht:

Kurve	Funktion f	Verfahren
geschlossen	mehrere Singularitäten	Residuensatz oder Kurve bzw. f zerlegen + CIF
geschlossen	Ein mehrfacher Pol $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ g analytisch nahe z_0	CIF II
geschlossen	Ein einfacher Pol $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-z_0}$ g analytisch nahe z_0	CIF I
geschlossen	f analytisch im einf. zshg. Gebiet um C	CIS : $\int_C f dz = 0$
nicht geschlossen	f analytisch im einf. zshg. Gebiet um C	Stammfunktion
NUR wenn	**es nicht anders**	**geht z.B.**
?	f nicht analytisch oder Stammfkt. zu schwierig	direktes Rechnen $\int f(c(t))\dot{c}(t)dt$