Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2011
Dr. Hanna Peywand Kiani

Anleitung 6 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Cauchy Integralformeln,

Taylor-Reihen, Singularitäten, Laurent-Reihen

10.06.2011

Wichtig: Für die gesamte Anleitung gilt, sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt:

$D \subset \mathbb{C}$ zusammenhägnedes Gebiet, C stückweise C^1 Kurve in D,
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorph.

****

Wir hatten bereits:

Cauchyscher Integralsatz (CIS) :

D **einfach** zusammenhängend und C **geschlossen** : $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$.

Einfach zusammenhängend: D hat keine Löcher

Homotopie: Sind C und $\tilde{C}$ zwei geschlossene, **in D** homotope (d.h. stetig und ohne Aufschneiden ineinander verformbare) stückweise C^1 Kurven, dann gilt

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\tilde{C}} f(z)\,dz$$

Für jede geschlossene Kurve Γ ,und jedes $z_0 \notin \Gamma$ gilt

$$\int\limits_{\Gamma} (z - z_0)^n\,dz, = \begin{cases} Uml(C, z_0) \cdot 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \in \mathbb{Z},\, n \neq -1 \end{cases}$$

Cauchyschen Integralformeln (CIF):

Seien f, D wie oben vereinbart,

$C : [a, b] \to D \setminus \{z_0\}$ geschlossen, z_0 homotop, stkw. C^1 , Uml $(C, z_0) = 1$

Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \qquad (CIF\ I)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (CIF\ II)$$

Falls $k = Uml(C, z_0) \neq 1$ erhält man auf der linken Seite noch den Faktor k.

Beispiel A: $C_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = re^{-i\phi},\, r = k,\, \phi \in [0, 2\pi] \right\}.$

$$\int_{C_1} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}}\, dz \ =$$

$$\int_{C_3} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}}\, dz \ =$$

$$\int_{C_4} \frac{e^{-z}}{(z-3)^{n+1}}\, dz \ = \ -4 \cdot \frac{2\pi i}{n!}\ (e^{-z})^{(n)}\Big|_3 = \frac{2\pi i}{n!}\,(-1)^n e^{-3}.$$

Beispiel B:

Zu berechnen sei

$$\int_{C_k} \frac{(2z+1-4i)\cos(i\pi z)}{(z-i)^2(z+2)}\, dz$$

mit $\qquad C_k\ :\ |z-1| = k, \qquad k = 1,2,3,4\,, Uml(C_k, 1) = 1\,.$

$$\int_{C_1} \frac{(2z+1-4i)\cos(i\pi z)}{(z-i)^2(z+2)}\, dz \ =$$

$$\int_{C_2} \frac{(2z+1-4i)\cos(i\pi z)}{(z-i)^2(z+2)}\, dz \ = \int_{C_2} \frac{\frac{(2z+1-4i)\cos(i\pi z)}{(z+2)}}{(z-i)^2}\, dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{(2z+1-4i)\cos(i\pi z)}{(z+2)} \right)'_{z=i}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{(-2(i+2) - (2i+1-4i)(-1)}{(i+2)^2} \right) = \ -2\pi i\,.$$

$$\int_{C_3} \frac{(2z+1-4i)\cos(i\pi z)}{(z-i)^2(z+2)}\, dz \ :$$

$$\int_{C_4} \frac{(2z+1-4i)\cos(i\pi z)}{(z-i)^2(z+2)}\, dz \ :$$

Partialbruchzerlegung liefert:

$$\frac{(2z+1-4i)}{(z-i)^2(z+1)} = \frac{az+b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+2} = \frac{z-2i}{(z-i)^2} - \frac{1}{z+2}$$

$$\int_{C_4} \cos(i\pi z)\left(\frac{z-2i}{(z-i)^2} - \frac{1}{z+2}\right) dz \ =$$

$$= 2\pi i \left(\left(\cos(i\pi z)(z-2i)\right)'_{z=i} \ - \ \left(\cos(i\pi z)\right)_{z=2}\right) = 2\pi i(-1-\cos(2\pi i))\,.$$

Taylor-Reihen

Wie schon in $\mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{T(z;f,z_0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n\,.}$$

$$\boxed{a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$$

wobei C den Punkt z_0 ein Mal positiv umläuft.

Die Reihe konvergiert im größten Kreis um z_0 in dem f analytisch ist **gegen** $\boldsymbol{f}$.

Beispiel a) Seien z_0, a, b komplexe Zahlen. Die Taylor-Reihe der Funktion

$$f\;:\;z \to \frac{a}{z-b}$$

mit Entwicklungspunkt z_0 hat den Konvergenzradius $|z_0-b|$.

Für $z = b = z_0 - (z_0 - b)$ liegt ein Pol der Funktion f vor.

Verwende geometrische Reihe: Ziel $(z-z_0)$ Potenzen!

$$f(z) \;=\; \frac{a}{(z-z_0)+(z_0-b)} \;=\; \frac{a}{(z_0-b)\left(1-\dfrac{z-z_0}{b-z_0}\right)}$$

$$=\; \frac{a}{z_0-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{b-z_0}} \;=\; \frac{a}{z_0-b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{b-z_0}\right)^k$$

Konvergenz liegt vor für $\left|\dfrac{z-z_0}{b-z_0}\right| < 1$ also $|z-z_0| < |b-z_0| = r$.
Der satz aus der Vorlesung besagt, dass die Reihe in diesem Kreis nicht gegen irgendwas, sondern gegen f konvergiert.

Beispiel b) Die Taylor-Reihe der Funktion

$$f\;:\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{C}\,,\qquad f(z) = \ln(z)\,,$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = i-1$

$$g(z) = f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-(i-1))+i-1} = \frac{1}{(i-1)\left(1+\dfrac{z-(i-1)}{i-1}\right)}$$

Für $\left|\dfrac{z-(i-1)}{i-1}\right| < 1$, also $|z-z_0| < \sqrt{2}$ erhält man

$$g(z) = \frac{1}{(i-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(- \frac{z-(i-1)}{i-1} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(i-1)^{k+1}} \,(z-(i-1))^k = f'(z).$$

und für $f(z)$ folgt dann

$$\begin{aligned} T_f(z; -1+i) &= f(z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(i-1)^{k+1}} \,(z-(i-1))^{k+1} \\ &= \ln(-1+i) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(i-1)^k} \,(z-(i-1))^k \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert für $|z-z_0| < \sqrt{2}$.

Sie konvergiert aber sicher nicht in der ganzen Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{2}$ um $z_0 = -1+i$ gegen $f(z) = \ln(z)$. Warum?

Konvergenz gegen f liegt für $|z-z_0| < 1$ vor. Warum?

Beispiel c) Die Taylor-Reihe der Funktion

$$f \,:\, z \to \frac{z\cos(z)}{\sin(z)-2}$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ konvergiert im größten Kreis um Null, in dem $\sin(z) \neq 2$ gilt gegen f.

$$\begin{aligned} \sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) &= 2 \Longrightarrow \\ \cos(x) = 0 &\Longleftrightarrow x_k = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \sin(x_k)\cosh(y) = 2 &\Longleftrightarrow \quad k = 2l, l \in \mathbb{Z},\ y = \operatorname{Arcosh}(2) = 1.317\cdots \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert im Kreis mit Radius

$r = \sqrt{(1.317\cdots)^2 + (\pi/2)^2}$ gegen f.

Man muss also die Reihe nicht berechnen, um den Konvergenzradius zu erhalten!

Singularitäten, Laurent-Reihen

Häufig sind Funktionen nur in einzelnen Punkten (**isolierte Singularitäten**) nicht analytisch.

Beispiel: Potential/elektrisches Feld einer Ladung Q im Punkt z_0 :

$$\Phi(z) = \frac{k \cdot Q}{\|z - z_0\|}, \qquad E(z) = grad\Phi(z) = \frac{k \cdot Q}{\|z - z_0\|^3}(z - z_0)$$

Wie verhalten sich die Funktionen in der Nähe solcher Punkte?

Seien: $G \subset \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G.

$D := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \subset G$

Dann kann f in D in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz}$$

wobei C irgendeine geschlossene, positiv orientierte, in D verlaufende Kurve mit $Uml(C, z_0) = 1$ sein darf.

- Die Reihe konvergiert im größten Ringgebiet $\subset G$ gegen f.
- Die Reihe ist bei vorgegebenem Ring eindeutig.
- Ziel ist NICHT die Koeffizienten über die Integrale zu rechnen sondern umgekehrt. Die Koeff' berechnet man z.B. mit
  - bekannten Reihen (z.B. bei $(\cos(z) - 1 + z^2)/z^5$ Bsp. g unten)
  - geometrische Rihe (Bsp a,b oben, d,e unten)
  - Ableitungen, Integrale (Bsp. b oben, Bsp f unten)
- Ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die im Ring $0 < |z - z_0| < R$ konvergente Laurent-Reihe zu f, so heißt

  $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\, dz =: Resf(z_0)$$

  das **Residuum von f an der Stelle $\mathbf{z}_0$**.

  Schreibweise: $\quad Resf(z_0) = Resf(z)\,|_{z=z_0} = Res(f; z_0)$.

Beispiel d: Geometrische Reihe

Gegeben Sei $f(z) := \dfrac{1}{z-w}$. Die Funktion hat eine Definitionslücke (isolierte Singularität) in $z = w$ und Gesucht ist: Entwicklung um $z_0 \neq w$.

Die Funktion ist analytisch in jedem der Ringe:
$R_1 : 0 \leq |z - z_0| < |z_0 - w|$
$R_2 : |z_0 - w| < |z - z_0| < \infty$

In R_1 gilt wie im Beispiel b) zu Taylor-Reihen:

$$\frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)} = \frac{1}{(z_0-w)}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}}\right) = \frac{1}{z_0-w}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}.$$

Laurent-Reihe = Taylor-Reihe, $a_k = 0 \qquad \forall k < 0$.

In R_2 gilt $|z_0 - w| < |z - z_0|$. Damit wir eine konvergente geometrische Reihe erhalten teilen wir hier im 1. Schritt durch $(z - z_0)$.

$$\frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)} \cdot \frac{1}{\left(1-\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)}$$

$$= \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}.$$

Fragen:
In R_1 gilt $a_{-1} = 0$, In R_2 gilt $a_{-1} = 1$. Welcher Wert ist $Resf(z_0)$?

Oben wurde vorausgesetzt: $z_0 \neq w$. Wie lautet die Laurent-Reihe für $z_0 = w$?

Polynom höheren Grades im Nenner:

- verschiedene Nullstellen: PBZ und Behandlung der einzelnen Summanden.
  Z.B. $z_0 = 0, \quad 0 < |a| < |b|$ und $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$

  PBZ liefert $\qquad f(z) = \dfrac{c}{z-a} + \dfrac{k}{z-b}$

  Die Funktion ist in den Ringen

  $R_1 : 0 < |z| < |a|, \qquad R_2 : |a| < |z| < |b|, \qquad R_3 : |b| < |z|$

  analytisch. Es gibt drei verschiedene Laurent-Reihen.

  Will man z.B. die Reihe, die für $z = 0.5(|a+b|)$ gegen $f(z)$ konvergiert, muss man im Mittleren Ring rechnen. Ist man dagegen an Konvergenz für $z = a/2$ interessiert, berechnet man die Reihe in innersten Ring R_1.

Beispiel e: $f(z) = \dfrac{(z+3)^2}{z^2+6z+8}$, $\qquad z_0 = 0$.
Gesucht sei diejenige Laurent-Reihe, die für $\hat{z} = 3$ gegen $f(\hat{z})$ konvergiert.

1. Schritt: Nullstellen vom Nenner bestimmen:

$$\frac{(z+3)^2}{z^2+6z+8} = \frac{(z+3)^2}{(z+2)(z+4)}$$

f ist nicht definiert (hat isolierte Singularitäten) in $z = 2$ und $z = 4$. Sonst ist f analytisch. Wir betrachten die Funktion also auf dem Ring

$R_2 \ : \ 2 < |z| < 4$.

2.Schritt: Evtl. Polynomdivision, Ausklammern etc. und PBZ

$$f(z) = 1 + \frac{1}{(z+2)(z+4)} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+4} \right)$$

Zunächst bestimmen wir die Entwicklungen der einzelnen Terme:

$|z| > 2 \ : \ \dfrac{1}{z+2} =$

$|z| < 4 \ : \ \dfrac{1}{z+4}$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklung der Funktion f im

Ring $2 < |z| < 4$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} -(-2)^{-k-2} z^k + 1 - \frac{1}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2 \cdot 4^{k+1}} z^k$$

- Mehrfache Nullstellen: PBZ, Eventuell Reihen der Ableitungsfunktionen

  Beispiel f: Z.B. $z_0 = 0\,,\quad 0 < |a|$ und $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^2}$

  Berechne erst die Reihe für $g(z) = \dfrac{1}{(z-a)^1}$ im gewünschten Ring

  $0 \leq |z| < |a|$ bzw. $|a| < |z|$. Leite anschließend die Reihe ab.

Ausblick: Integralberechnung über Laurent-Reihen

Beispiel g: Sei C eine geschlossene Kurve, die Null einmal positiv umläuft. Die Funktion $f(z) = \dfrac{\cos(z) - 1 + z^2}{z^5}$ hat eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$. Es gilt

$$a_{-1} = Resf(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

Andererseits

$$f(z) = \frac{-1 + z^2 + 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots}{z^5} = \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z} - \frac{z}{6!} + \frac{z^3}{8!} \mp \cdots$$

Also gilt

$$\oint_C \frac{-1 - z^2 + \cos(z)}{z^5}\,dz = 2\pi i\,\frac{1}{4!}.$$

Isolierte Singularitäten

$z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **isolierte Singulartät** der analytischen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, wenn eine punktierte Umgebung von z_0 zu G gehört, nicht aber z_0 selbst:

$$0 < |z - z_0| < r \subset G, \quad z_0 \notin G, \quad r > 0\,.$$

Beispiele:

- 0 und 1 sind isolierte Singularitäten der Funktion $f(z) := \dfrac{z-1}{z^2(z-1)}$.
- -1 ist keine isolierte Singularität von $f(z) := \ln(z)$.

Klassifikation

Sei z_0 isolierte Singulartät von f. Dann kann f in $0 < |z-z_0| < r$ in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k\,.$$

- z_0 heißt **hebbare Singularität** $\iff$ $a_k = 0 \quad \forall k < 0\,.$
- z_0 heißt **Pol m-ter Ordnung** mit $m \in \mathbb{N}$ $\iff$ $a_{-m} \neq 0\,, \quad a_k = 0 \quad \forall k < -m\,.$

  Die Laurent-Reihe hat also die Form

  $$a_{-m}\,\frac{1}{(z-z_0)^m} + a_{-m+1}\,\frac{1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + a_{-1}\,\frac{1}{(z-z_0)^1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$$

- z_0 heißt **wesentliche Singularität** $\iff$ $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0\,.$

Beispiel 1) $f(z) := \dfrac{1}{z(z^2+4)}$

Die Funktion hat in den Nennernullstellen $0,\ 2i,\ -2i$ isolierte Singularitäten.

Zur Klassifikation gibt es (mindestens) zwei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Reihe berechnen. Für $z_0 = 0,\ |z| < 2$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{4\left(1-(-\frac{z^2}{4})\right)} = \frac{1}{4z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}z^{2k-1} = \frac{1}{4z} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}z^{2k-1}}_{\text{positive Potenzen}}$$

$z_0 = 0$ ist also Pol erster Ordnung.

2. Möglichkeit: Reihe wird nicht berechnet

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\underbrace{\frac{1}{4(1+\frac{z^2}{4})}}_{g(z)}$$

$g(z)$ ist holomorph (analytisch) nahe $z_0 = 0$ und kann in eine Taylor-Reihe

$$g(z) = g(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z-z_0)^k$$

entwickelt werden. Damit ist f nahe z_0 gegeben durch

$$f(z) = \frac{g(0)}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\,(z-0)^{k-1}$$

Wegen $g(0) = 1/4 \neq 0$ ist die niedrigste in der Reihe vorkommende Potenz von $(z-0)$ also -1.

ACHTUNG: Für $|z| > 2$ erhält man

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{z^2 \left(1 + \frac{4}{z^2}\right)} \right) = \ldots = \sum_{=-\infty}^{-1} (-4)^{-k-1} \, z^{2k-1}$$

also unendlich viele Terme mit negativen Potenzen!

Frage: Liegt also doch eine wesentliche Singularität in $z_0 = 0$ vor?

Beispiel 2) $f(z) := \dfrac{\sin(z)}{z^4} =$

hat f einen Pol 4. Ordnung in $z_0 = 0$?

Beispiel 3) $f(z) := e^{\frac{1}{z+3}}$ hat eine isolierte Singuarität in $z_0 = -3$.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{z+3} \right)^k = 1 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-k)!} \cdot (z - (-3))^k$$

In $z_0 = -3$ liegt eine wesentliche Singularität vor.

Beispiel 4) $f(z) := \dfrac{z + 2i}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$