Department Mathematik der Universität Hamburg
Dr. H. P. Kiani

Anleitung zu Blatt 5, Analysis II

SoSe 2012

Integration II:
Partialbruchzerlegung, uneigentliche Integrale

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Integration rationaler Funktionen $\tilde{f}(x) = \tilde{p}(x)/q(x)$

$\tilde{p}$ und q : Polynome mit reellen Koeffizienten

Gesucht: Stammfunktion von $\tilde{f}$.

Schritt 1 : Polynomdivision $\tilde{p}(x)/q(x) = g(x) + p(x)/q(x)$
g, p: Polynome und grad$(p) <$ grad(q).

BEISPIEL: $\tilde{f}(x) = \dfrac{2x^5 + 4x^4 + 6x^3 - 4x + 2}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2}$

$$2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 0x^2 - 4x + 2 \;:\; x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = 2x$$

$$2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x$$

=================== ============

$$4x^3 + 4x^2 + 2$$

$$\tilde{f}(x) = 2x + \frac{4x^3 + 4x^2 + 2}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2}$$

Der polynomiale Teil (hier $2x$) kann einfach integriert werden.
Im folgenden: Integration von

$$f(x) := p(x)/q(x) \qquad p, q \text{ reelle Polynome, und } \operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q).$$

IDEE : Schreibe f als Summe einfacherer Brüche. Die Nenner dieser Brüche müßten dann multiplikative Faktoren von q sein. Zerlege also q in einfachere Faktoren.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \cdots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^3 - x} = \frac{p(x)}{x(x^2 - 1)} = \frac{p(x)}{x(x-1)(x+1)}$$

Schritt 2 : Bestimme Nullstellen bzw. quadrat. Faktoren von q

BEISPIEL: $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$. Summe der Koeffizienten ist $= 0$. Also ist 1 eine Nullstelle

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 \,:\, x - 1 = x^3 + \cdots$$

$$x^4 - x^3$$

$$=======\ ===========$$

$$3x^3 + x^2 - 2x - 2$$

$$3x^3 - 3x^2$$

$$======\ ===========$$

$$4x^2 - 2x - 2$$

$$4x^2 - 4x$$

$$=====\ ===========$$

$$2x - 2$$

$$2x - 2$$

Also: $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x-1)(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$

Nullstellen von $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$: Summe der Koeffizienten der geraden Potenzen $=$ Summe der Koeffizienten der geraden Potenzen $\Longrightarrow$ -1 ist Nullstelle

Polynomdivision (wie oben) liefert : $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 : (x+1) = x^2 + 2x + 2$

Also:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 &= (x-1)(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ hat keine weiteren reellen Nullstellen.

$$\Longrightarrow \; f(x) = \frac{p(x)}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2} = \frac{p(x)}{(x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 2)}$$

Schritt 3 : Ansatz für f

Kann ich f schreiben als:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-1)(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{?}{x-1} + \frac{?}{x+1} + \frac{?}{x^2+2x+2}\,?$$

Im allgemeinen Fall gehen wir von Grad$(p) \leq$ Grad $(q) - 1$ aus. Bildet man aus den Brüchen rechts wieder einen Bruch mit (dem alten) gemeinsamen Nenner, so sollten im Zähler Polynome bis Grad$(q) - 1$ entstehen können. Daher der Ansatz:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-1)(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}$$

Schritt 4 : Berechnung der Unbekannten im Ansatz für f

$$f(x) = \frac{4x^3+4x^2+2}{x^4+2x^3+x^2-2x-2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}$$

Bilde auf der rechten Seite wieder den gemeisamen Nenner:

$$f(x) = \frac{4x^3+4x^2+2}{x^4+2x^3+x^2-2x-2}$$
$$= \frac{a(x+1)(x^2+2x+2)+b(x-1)(x^2+2x+2)+(cx+d)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+2x+2)}$$

Da die Nenner gleich sind, müssen auch die Zähler gleich sein! Also

$4x^3+4x^2+2 = a(x+1)(x^2+2x+2)+b(x-1)(x^2+2x+2)+(cx+d)(x-1)(x+1)$!

1.Möglichkeit : Zähler ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

2.Möglichkeit : Einsetzen einfacher Werte, insbesondere Einsetzen der Nullstellen von q.

$$4x^3 + 4x^2 + 2$$
$$\stackrel{!}{=} a(x+1)(x^2+2x+2) + b(x-1)(x^2+2x+2) + (cx+d)(x-1)(x+1)$$

$$x = -1 \;:\; -4+4+2 \;=\; b(-2)(1-2+2) \implies b = -1$$

$$x = +1 \;:\; 4+4+2 \;=\; a(2)(1+2+2) \implies a = +1$$

$$x = 0 \;:\; 2 \;=\; (1)(1)(2) + -1(-1)(2) + d(-1) \implies d = +2$$

$$4 \cdot x^3 = (a+b+c)x^3 = (1-1+c)x^3 \implies c = 4$$

Es gilt also $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{4x+2}{x^2+2x+2}$.

Schritt 5 : Integration der Bausteine

Zwei der Bausteine der Summe können wir sofort integrieren.

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} \ln|x-a| \,+\, C & k = 1. \\ \dfrac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} \,+\, C & k \in \mathbb{N},\ k \neq 1\,. \end{cases}$$

Es bleibt: $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2+2x+2}\,dx$

IDEE : zerlege in einen Logarithmus also h'/h Term und einen $\arctan$ also $1/(1+t^2)$ Term

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx &= 2\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx = 2\int \frac{2x+2-1}{x^2+2x+2}dx \\
&= 2\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - 2\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx\right) \\
&= 2\int \frac{du}{u} - 2\int \frac{1}{1+(x+1)^2}dx \qquad u = x^2+2x+2, \\
&= 2\ln(u) - 2\int \frac{1}{1+(x+1)^2}dx \qquad \frac{du}{dx} = 2x+2 \\
&= 2\ln(x^2+2x+2) - 2\int \frac{1}{1+y^2}dy \qquad y = 1+x,\ dy = dx \\
&= 2\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan y + C
\end{aligned}
$$

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(1+x) + C$$

Methode übertragbar auf beliebige Nenner mit einfachen Nullstellen.

Mehrfache Nullstellen des Nenners:

Ganz einfaches Beispiel: $f(x) = \dfrac{ax+b}{(x-x_0)^2}$

Zerlege Zähler in $a(x-x_0) + (b+ax_0)$

$$f(x) = \frac{a(x-x_0)}{(x-x_0)^2} + \frac{b+ax_0}{(x-x_0)^2} = \frac{a}{(x-x_0)} + \frac{b+ax_0}{(x-x_0)^2}$$

Unser Ansatz liefert also für **Doppelte Nullstelle:**

$$\boxed{f(x) = \frac{c_1}{(x-x_0)^1} + \frac{c_2}{(x-x_0)^2}}$$

Analoger Ansatz bei k-fachen reellen Nullstellen $\Longrightarrow$ entstehende Summanden haben die Form $c_m(x-x_0)^{-m}$ und können direkt integriert werden.

Dreifache Nullstelle : $f(x) = \dfrac{3x^2+4x}{(x+1)^3}$

$$f(x) = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}$$

Beispiel: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{5x}{(x-1)^2(2x^2+4x+4)}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{5x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$$

Ansatz: $\displaystyle 2\,f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{(x+1)^2+1}$

Rest: (fast) wie oben

Doppeltes komplexes Nullstellenpaar:

$z_k, \bar{z}_k$ mit $(x - z_k)(x - \bar{z}_k) = (x^2 + \alpha_k x + \beta_k)$

Mache analog den Ansatz

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x^2 + \alpha_k x + \beta_k)^2} = \frac{b_1 x + c_1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^1} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^2}$$

Den ersten Summanden können wir integrieren: vgl. Beispiel 1.

Ein Integral der Form $\displaystyle\int \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^l} dx, \quad l \neq 1$ wird zerlegt in

$$\int \frac{k(x^2 + \alpha x + \beta)'}{(x^2 + \alpha x + \beta)^l} dx = \int \frac{k(2x + \alpha)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^l} dx$$

$$= -\frac{k}{(l-1)(x^2 + \alpha x + \beta)^{l-1}} + C$$

und ein Integral der Form

$$\tilde{k} \cdot I_l := \tilde{k} \cdot \int \frac{1}{(1+t^2)^l}\, dt\,,$$

welches wie folgt rekursiv gelöst werden kann.

$$\begin{aligned} I_1 &:= \arctan t + C, \\ I_n &= \frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + (2n-3)\, I_{n-1}(t) \right) + C. \end{aligned}$$

Speziell $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} + \arctan t + C \right)$.

Weitere Anwendungsmöglichkeiten:

$R(e^x, \sinh(x), \cosh(x))$: Substitution $u = e^x$.

$R(\sin(x), \cos(x))$: Substitution $t = \tan(x/2) \Longrightarrow$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (Nachrechnen!).

$$\frac{x}{2} = \arctan t \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Longrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

BEISPIELE:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\frac{3}{4}\sin(x)+\cos(x)}\,dx\,,$ Substitution: $t := \tan\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

und damit

$$\int \frac{1}{\frac{3}{4}\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int \frac{1}{\frac{3t}{2(1+t^2)}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{2}{\frac{3}{2}\,t+1-t^2}dt = -\int \frac{2}{(t-2)(t+\frac{1}{2})}dt\,.$$

Partialbruchzerlegung: $\displaystyle\frac{-2}{(t-2)(t+\frac{1}{2})} = \frac{a}{t-2}+\frac{b}{t+\frac{1}{2}}$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{2\cosh(2x)+2}\cdot\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\,dx$

Mit der Substitution $\qquad t := e^x\,, \quad \frac{dt}{dx} = e^x = t\,, \quad dx = \frac{dt}{t}\,,$

$$\int \frac{1}{2\cosh(2x)+2}\cdot\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\,dx \;=\; \int \frac{1}{2\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)+2}\cdot\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)\,dx$$

$$= \int \left(\frac{e^{2x}+e^x}{e^{4x}+2e^{2x}+1}\right)\,dx \qquad t := e^x,\ \frac{dt}{dx} = e^x = t$$

$$= \int \left(\frac{t^2+t}{t^4+2t^2+1}\right)\frac{dt}{t} \;=\; \int \left(\frac{t+1}{(1+t^2)^2}\right)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{t+1}{(1+t^2)^2} \right) dt &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(1+t^2)^2}\, dt \;+\; \int \left(\frac{1}{(1+t^2)^2} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \;+\; \int \frac{1}{(1+t^2)^2}\, dt \qquad\qquad y = 1+t^2,\ \frac{dy}{dt} = 2t \\
&= -\frac{1}{2y} \;+\; \frac{1}{2} \left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1} \right) \;+\; C \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1+t^2} + \frac{t}{t^2+1} + \arctan t \right] \;+\; C \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{e^x - 1}{e^{2x}+1} + \arctan(e^x) \right] + C\,.
\end{aligned}
$$

Uneigentliche Integrale

Bisher betrachtet:

unbestimmtes Integral: $\displaystyle\int f(x)dx$ z.B. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C.$

bestimmtes Integral: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ z.B. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2} + 1.$

beschränkter Integrand, beschränktes Intervall !

Frage: Machen die folgende Ausdrücke Sinn?

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$$

Naheliegend : Grenzwertbildung

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{z\to\infty}\int_1^z \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{z\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^z \;=\; -\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z} + 1 \;=\; 1.$$

analog

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \lim_{a\to 0+} -\frac{1}{x}\bigg|_a^1 \;=\; -1 - \lim_{a\to 0+}\frac{-1}{a} \;=\; \infty.$$

Man sagt im ersten Fall das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ existiert oder konvergiert und im zweiten Fall das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ existiert nicht oder divergiert.

1. Fall: Stammfunktion berechnen und Grenzwert bilden

Wichtiges Beispiel 1) Sei $f(x) := x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, I = (a,\infty), a > 0.$

Dann ist f stetig in I und damit auf I lokal integrierbar. Es gilt

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & \alpha = -1 \end{cases}$$

Das heißt für $a > 0$

$$\boxed{\int_a^\infty x^\alpha dx \text{ existiert } \iff \alpha < -1.}$$

Völlig analog schließt man

$$\boxed{\int_0^a x^\alpha dx \text{ existiert } \iff \alpha > -1.}$$

Zur Erinnerung:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^r} \qquad \begin{cases} \text{divergiert für} & r \leq 1 \quad (\text{ entspricht } \alpha \geq -1) \\ \text{konvergiert für} & r > 1 \quad (\text{ entspricht } \alpha < -1) \end{cases}$$

Beispiel 2)

$$\int_0^\infty \cos(x)dx \ := \lim_{z\to\infty} \int_0^z \cos(x)dx$$

$$= \lim_{z\to\infty} \sin(x)\,\big|_0^z = \lim_{z\to\infty} \sin(z) \qquad \text{existiert nicht!}$$

Beispiel 3)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} := \lim_{y\to-\infty} \int_y^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{z\to\infty} \int_0^z \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= - \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) + \lim_{z\to\infty} \arctan(z)$$

$$= -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi \,.$$

2. Fall: Stammfunktion nicht bekannt, nur Existenz/Konvergenz zu prüfen

Satz (Majoranten- /Minorantenkriterium):
Seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gelten:

- **Majorantenkriterium**

  Ist $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [a, \infty)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent,

  so konvergiert auch $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$

- **Minorantenkriterium**

  Ist $0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, \infty)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent,

  so divergiert auch $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$

.

Der Satz gilt wieder analog für $I = (-\infty, b]$, und im Falle einer isolierten Definitionslücke. Liegen mehrere Problemstellen vor, so wird das Integral zerlegt, so dass man es jeweils nur mit einem Problem zu tun hat.

BEISPIELE)

$$\int_1^{\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^6+2x^2+1}}\,dx$$