Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Anleitung zu Blatt 2, Analysis II

SoSe 2012

Funktionenfolgen, Potenzreihen I

Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \qquad x_0,\, a_k \in \mathbb{R}\,.$$

$x_0 =$ Entwicklungspunkt.
Die Partialsummen von Potenzreihen sind Polynome.
Beispiel: Taylorreihen/Taylorpolynome.

SATZ : CAUCHY, HADAMARD

Zu jeder Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ gibt es einen Konvergenzradius $r \geq 0$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Potenzreihe konvergiert punktweise im offenen Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$. Die Konvergenz ist in jedem kompakten Teilintervall von $(x_0 - r, x_0 + r)$ gleichmäßig.

- Die Potenzreihe divergiert außerhalb von $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Bemerkung :
$r = 0 \implies$ Potenzreihe konvergiert nur für $x = x_0$.
$r = \infty \implies$ Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

r heißt **Konvergenzradius** der Reihe.

$$\boxed{r := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

$\limsup b_k$ war definiert als größter Häufungspunkt der Folge, falls diese beschränkt ist, und ∞ anderenfalls.

Für eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit $a_k \neq 0\,, \forall k \geq k_0$ gilt im Falle der Existenz des Grentwertes

$$\boxed{r := \lim_{k\to\infty, k\geq k_0} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

Bemerkungen:

- In den Randpunkten $x_0 - r$ und $x_0 + r$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Siehe Beispiel.

- Potenzreihen können innerhalb ihres Konvergenzintervalles gliedweise integriert und differenziert werden.

BEISPIELE:

- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}} (x+2)^k \, .$$

  Konvergenzradius:

  $$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k)^2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^{k+2}}{(k+1)^2} =$$

  Konvergenz in $]-4,\, 0[$ und Divergenz für $|x-(-2)| > 2$.

  Randpunkte: $x_1 = -4$ bzw. $x_2 = 0$

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}} (\mp 2)^k = 0.5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\mp 1)^k k^2$$

  Divergenz in den Randpunkten.

  Konvergenzbereich/Konvergenzintervall $]-4, 0[$

Alternativ: $r^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k^2}{2^{k+1}}\right|} = \limsup_{k\to\infty} \frac{(\sqrt[k]{k})^2}{2\sqrt[k]{2}}$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \big(3 + (-1)^k\big)^k \, (x-5)^k \, . \qquad x_0 =$

$$a_k = \begin{cases} (3+1)^k = 4^k & k \text{ gerade,} \\ (3-1)^k = 2^k & k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \begin{cases} \dfrac{4^k}{2^{k+1}} = 2^{k-1} & k \text{ gerade,} \\ \dfrac{2^k}{4^{k+1}} = \dfrac{1}{2^{k+2}} & k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = ?$$

$$\sqrt[l]{|a_l|} =$$

$$\begin{cases} \sqrt[2k]{a_{2k}} \;=\; \sqrt[2k]{4^{2k}} \;=\; 4 \qquad l = 2k \\ \sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} \;=\; \sqrt[2k+1]{2^{2k+1}} \;=\; 2 \qquad l = 2k+1 \end{cases}$$

$$r^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} =$$

Konvergenz in $]5-\frac{1}{4},\, 5+\frac{1}{4}[$ und Divergenz für $|x-5| > \frac{1}{4}$.

Randpunkte: $x = \pm\frac{1}{4}$:

$$a_{2k}\left(\pm\frac{1}{4}\right)^{2k} = 1$$

Die Summanden konvergieren für die Randpunkte nicht gegen Null. Notwendiges Kriterium für die Konvergenz der Reihe verletzt. Keine Konvergenz in den Randpunkten!!

- Gesucht Konvergenzintervall von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+x)^n} =$$

Dies ist keine Potenzreihe!

Geometrische Reihe mit $q = \dfrac{x}{2+x}$. Konvergent für:

$$|q| = \left|\frac{x}{2+x}\right| < 1 \iff \left(\frac{x}{2+x}\right)^2 < 1$$

$$\iff x^2 < 4 + 4x + x^2 \iff x > -1$$

Für $x = -1$ erhält man die divergente Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n$.

Alternativ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^n}{(2+x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot z^n \qquad \text{mit } z = \frac{x}{2+x}$$

Quotienten- oder Wurzelkriterium: $r_z = 1$

Randpunkte: $z = \pm 1$ liefern divergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n$

Nützlich für die Untersuchung der Randpunkte in Aufgabe 1 sind auch:
die Majoranten/Minoranten aus Analysis I.

Einige Techniken zur Berechnung von Potenzreihen :

- Geometrische Reihe (siehe Beispiele 1-3)
- Bekannte (Taylor-)Reihen /Koeffizientenvergleich (nächte Anleitung)
- Integration/Differentiation (Beispiel 4)
- Binomische Reihe (Beispiel 6)
- Produkte von Reihen (Beispiel 5)
- ....

Geometrische Reihe:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} \quad \forall\, |z| < 1}$$

BEISPIEL 1) $x_0 = 0$

$$\frac{5}{3-8x} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{3}x} = \frac{5}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3}x\right)^k \qquad .$$

Geometrische Reihe mit $q = \frac{8}{3}x$. D.h. Konvergenz genau dann wenn

$\left|\frac{8}{3}x\right| < 1 \iff |x| < \frac{3}{8}$.

Taylorpolynom $n-$ten Grades $= \dfrac{5}{3} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{8}{3}x\right)^k$

z.B. $\qquad T_3(x;0) = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{8}{3}x + \frac{64}{9}x^2 + \frac{512}{27}x^3\right)$

BEISPIEL 2) $\dfrac{5}{3-8x} = ?$ $\qquad x_0 = 1\,.$ $\qquad$ Ziel : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$

Erzeuge statt $x-$Potenzen $(x-1)-$Potenzen!

$$\frac{5}{3-8x} =$$

Geometrische Reihe mit $q = -\frac{8}{5}(x-1)$.

D.h. Konvergenz genau dann wenn

$$\left|\tfrac{8}{5}(x-1)\right| < 1 \iff |x-1| < \tfrac{5}{8} \iff 1 - \tfrac{5}{8} < x < 1 + \tfrac{5}{8}$$

BEISPIEL 3) $\dfrac{8x}{x^2-4} =? \qquad x_0 = 0\,.$

$$\frac{8x}{x^2-4} = 8x\left(\tfrac{1}{-4}\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}}\right) \;=\; -2x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{x^{2k+1}}{2^{2k-1}}\,.$$

Hat man im Nenner ein Polynom zweiten Grades, also $\dfrac{p(x)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, so macht man eine PBZ:

$$\frac{8x}{x^2-4} = \frac{8x}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}\,.$$

Es muss gelten: $8x = a(x+2) + b(x-2)$.
Einsetzen der Nennernullstellen $x = \pm 2$ ergibt

$$\begin{aligned} x = +2 \;: &\quad +16 = 4a + 0 \implies a = 4 \\ x = -2 \;: &\quad -16 = 0 - 4b \implies b = 4 \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{8x}{x^2-4} =& 4\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right) = 4\left(\frac{1}{-2(1-\frac{x}{2})}+\frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}\right)\\
=& 2\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^k\right)\\
=& -2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k x^k\right)\\
=& -2\sum_{k=0}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{2k-1}}\, x^{2k+1}\,.
\end{aligned}
$$

Ausnahme: Im Nenner $(x-a)^2$. Lösung über Differentiation:

BEISPIEL 4) Nützlich fü Aufgabe 3a

$$g(x) = \frac{8x}{(4x-2)^2} =? \qquad x_0 = 0\,.$$

$$\left(\frac{1}{4x-2}\right)' = \frac{-4}{(4x-2)^2}$$

$$\begin{aligned} 8x \cdot \frac{1}{(4x-2)^2} &= 8x \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot \left(\frac{1}{4x-2}\right)' \\ &= -2x \cdot \left(\frac{1}{-2(1-2x)}\right)' = x \cdot \left(\frac{1}{1-2x}\right)'. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k \qquad \forall\, |x| < 0.5.$$

$$g(x) = x \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k\right)' = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot k \cdot x^{k-1}$$

Elementare Funktionen: nächte Anleitung

Diese Woche brauchen wir nur:

Exponentialreihe: Definiere für $z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}$$

Konvergenzradius : $\qquad r := \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \infty$

D.h.: die Exponentialreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ gleichmäßig.

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Analog **Cosinus-Reihe:**

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

BEISPIEL 5) Cauchy-Produkt zweier Potenzreihen: Nützlich für Aufgabe 3b:
Für das Produkt von zwei Potenzreihen gilt dort, wo beide reihen konvergieren

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\, z^l\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}\, b_l\right) \cdot z^k$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(z)}{1-z} &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l}}{(2l)!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \\
&= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1+(-1)^l)(-1)^{l/2}\frac{z^l}{l!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{(1+(-1)^l)(-1)^{l/2}}{l!}\right) \cdot z^k \qquad \forall |z| < 1\,. \\
&= 1 + x + (1-\frac{1}{2!})x^2 + (1-\frac{1}{2!})x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Binomialreihe

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1}$$

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j), \qquad k \geq 0$$

Bemerkungen:

1) Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe bei $k = n+1$ ab.

$$\begin{aligned}\binom{n}{n+m} &:= \frac{1}{(n+m)!} \prod_{j=0}^{n+m-1} (n-j) \\ &= \frac{1}{(n+m)!}(n-0)(n-1)\cdots(n-n)\cdots(n-(n+m-1))\end{aligned}$$

2) Ein leeres Produkt hat den Wert 1, also $\prod_{m}^{n} a(j) := 1$ für $n < m$. $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Beispiel 6: Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f : [-8, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{8+x}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius. Geben Sie das Taylorpolynom $T_3(x; 0)$ zu f an.

Nach Vorlesung gilt

$$f(x) = \left(8(1 + \tfrac{1}{8}x)\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{k} \left(\frac{x}{8}\right)^k \text{ mit dem Konvergenzradius } r = 8.$$

Für $k \geq 1$ gilt:

$$\binom{\frac{1}{3}}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{3} - j\right) = \frac{1}{k!} \frac{1}{3^k} \prod_{j=0}^{k-1} (1 - 3j) = \frac{(-1)^k}{k!\, 3^k} \prod_{j=0}^{k-1} (3j - 1)$$

Damit gilt

$$f(x) = 2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 3^k \cdot 8^k} \left[\prod_{j=0}^{k-1} (3j-1)\right] x^k.$$

$$T_3(x;0) = 2 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{9 \cdot 32} + \frac{5x^3}{3^4 \cdot 8^3}\,.$$

Alternativ: Ableitungen von $f(x) = (8+x)^{1/3}$ berechnen

$f'(x) = \frac{1}{3}(8+x)^{-2/3}, \qquad f'(0) = \frac{1}{12}$

$f''(x) = \frac{-2}{9}(8+x)^{-5/3}, \qquad f''(0) = -\frac{1}{9 \cdot 16}$

$f'''(x) = \frac{10}{27}(8+x)^{-8/3}, \qquad f'''(0) = \frac{20}{3^3 \cdot 8^3} = 0.0014466\cdots$

Nahe $x_0 = 0$ sind die ersten Terme der Reihe eine Gute Näherung fü die Funktion!