Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. H. P. Kiani

NEXTLEVEL im WiSe 2011/12

Wiederholung Vorlesung 1, Ergänzungen

Die ins Netz gestellten Kopien der Vorlesungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Infimum, Supremum etc.:

Beispiel 1) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2 - \frac{3}{n}\}$

$M_1 = \{$

inf $M_1 =$

sup $M_1 =$

Min $M_1 =$

Max $M_1 =$

Beispiel 2) $M := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} \;\text{ mit } x = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} \right\}$

Fragen: ist M beschränkt? Inf? Sup? Max? Min?

Wie sieht M aus?

Fakultäten und Binomialkoeffizientan:

$$\boxed{n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n}$$

Es gibt $n!$ verschiedene Möglichkeiten n verschiedene Objekte zu sortieren!

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \binom{n}{n} := \binom{n}{0} := 1.}$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ verschiedene Möglichkeiten k Elemente aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen zu wählen!

Also $\binom{49}{6}$ mögliche Ergebnisse beim Lotto.

Übung: Zeigen Sie $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Lösung:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

Zielausdruck: $\binom{n+1}{k} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

$(n-k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-k)(n-k+1) \; = \; (n-k)! \cdot (n-k+1)$

analog $k! = (k-1)! \cdot k$

Wiederholung Induktion:

Beispiel 1: Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n > n$.
Beweis:

a) Anfang: Für $n = 1$ gilt $2^1 > 1$.

b) Annahme: Für eine beliebige, feste natürliche Zahl N gelte $2^N > N$.

c) Schritt: Zu zeigen ist $2^{N+1} > N + 1$

   Beweisstrategie :

   1) Zerlege den neuen Ausdruck (hier 2^{N+1} oder $N + 1$) in einen aus der Annahme bekannten und einen neuen Teil:

   $2^{N+1} = 2^N \cdot 2$ 2) Setzte die Information aus der Annahme ein

   $2^{N+1} = 2^N \cdot 2 > N \cdot 2$

   3) Versuche nun durch Umformungen die Behauptung für $n = N + 1$ zu beweisen

   $2^{N+1} > N \cdot 2 \quad \cdots \geq \quad N + 1$

Beispiel 2: (ein wenig komplizierter)

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis: *Induktionsanfang:* $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}.$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen mit einem festen aber beliebigem $N \in \mathbb{N}$ an, dass die Behauptung für alle $n \leq N$ gilt.

Induktionsschritt:
Wir beweisen nun die Behauptung für $n = N + 1$.

Ziel: $\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \frac{(N+1)\,((N+1)+1)\,(2(N+1)+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} k^2\right) + (N+1)^2$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung}$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1) + 6(N+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(N+1)(2N^2 + N + 6N + 6)}{6}$$

$$= \frac{(N+1)(N+2)(2N+3))}{6}$$

Beispiel 3: (Ungleichung)

Behauptung : Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Beweis: *Induktionsanfang:* $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}.$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen mit einem festen aber beliebigem $N \in \mathbb{N}$ an, dass die Behauptung für N gilt, also

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{N}$$

Induktionsschritt: Wir beweisen nun die Behauptung für $n = N + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} = & \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(N+1)^2} \\
& \leq 2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{(N+1)^2} \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
& = 2 - \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{(N+1)^2} \right] \\
& = 2 - \left[\frac{(N+1)^2 - N}{N(N+1)^2} \right] = 2 - \frac{1}{N+1} \left[\frac{N^2 + N + 1}{N(N+1)} \right] \\
& = 2 - \frac{1}{N+1} \left[1 + \frac{1}{N(N+1)} \right] < 2 - \frac{1}{N+1} \,.
\end{aligned}$$

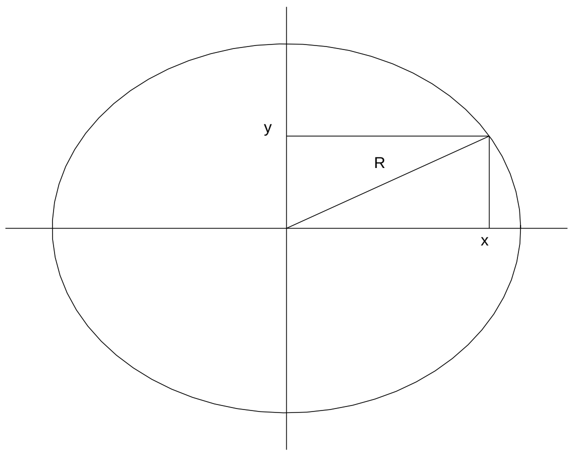
Weiter mit Folie 49 von Vorlesung 1

Komplexe Zahlen

$z \in \mathbb{C} : z := x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i =$ imaginäre Einheit

$x =:$ Re $z, \quad y =:$ Im (z)

$|z| :=$ Abstand zu $0 + i \cdot 0 =$ Länge des Ortsvektors$= \sqrt{x^2 + y^2}$.



Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$

Addition: komponentenweise $(2+3i)+(5-2i)=7+i$

Multiplikation:

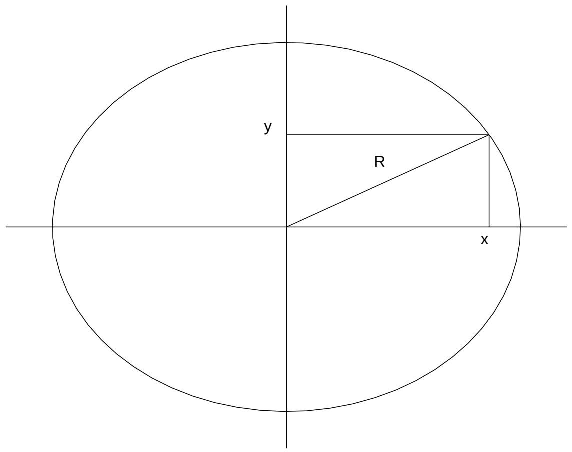
$$(a+ib)(x+iy) = ax+iay+ibx+i^2by = (ax-by)+i(ay+bx) \in \mathbb{C}$$

Nicht so hübsch! Schöner in Polarkoordinaten

Polarkoordinaten: wie im $\mathbb{R}^2$: $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi)\,,$$

$$z = r\,(\,\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)\,) = re^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi}$$



Einheitskreis:

$$K_1 := \{z \in \mathbb{C} : \; z = \; re^{i\varphi}, \, r = 1\,\}$$

$$= \; \{z \in \mathbb{C} : \; z = \; e^{i\varphi}, \, \varphi \in \; [0, \, 2\pi)\}$$

Beispiele:

$$i = \; e^{i\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow i^2 \; = \; e^{i\pi} \; = \; -1.$$

$$z = x + iy = 4 + 4i \Longrightarrow r = \sqrt{4^2 + 4^2} \; = \; 4\sqrt{2}$$

$$z = re^{i\varphi} = \; 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \; 4\sqrt{2}\,\big(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})\big)$$

$$= 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Multiplikation

1. Fall: $a \in \mathbb{R}^+$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

$z \mapsto az = are^{i\varphi}$: Streckung (Stauchung) um Faktor a.

2. Fall: $c = e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

$z \mapsto cz = re^{i(\varphi + \alpha)}$: Drehung um Winkel α.

3. Fall: $c = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, $z := re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

$z \mapsto cz = are^{i(\varphi + \alpha)}$: Drehstreckung.

Beträge werden multipliziert. Argumente werden addiert.

Hinweise zur Aufgabe 3: Polynomdivision/ Hornerschema

Beispiel: Gegeben sei $p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5$.
a) Bestimmen Sie die alle Nullstellen von p.
b) Schreiben Sie p in Potenzen von $(x-1)$ um, d.h. in die form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k (x-1)^k.$$

Zu a)
1) Wenn möglich $x-$Potenzen abspalten
2) Nullstelle erraten. Zum Beispiel über

$\sum$ Koeffizienten $= 0 \iff p(1) = 0$ oder

$\sum$ Koeffizienten der geraden Potenzen $= \sum$ Koeffizienten der ungeraden Potenzen $\iff p(-1) = 0$

Sonst mit kleinen ganzen Zahlen z.B. $\pm 2, \pm 3$ probieren.

3) Nullstelle(n) abspalten mit Polynomdivision oder Hornerschema

Hier: $x_0 = 1$ ist Nullstelle $\iff$ $(x-1)$ ist ein Linearfaktor

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 4 & -2 & -5 \\ 1 & & 1 & 3 & 7 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 7 & 5 & 0 \end{array}$$

D.h.

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = (x-1)(x^3 + 3x^2 + 7x + 5).$$

$$(x^3 + 3x^2 + 7x + 5) : (x+1) =$$

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 5)$$

– Quadratisches Polynom $x^2 + 2x + 5 = 0$: p-q-Formel oder quadratische Ergänzung

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x + 5 \;&=\; (x+1)^2 - 1 + 5 = 0 \\
&\iff x + 1 = \pm\sqrt{-4} \iff x = -1 \pm 2\sqrt{-1} \\
&\iff x = -1 + 2i \;\vee\; x = -1 - 2i
\end{aligned}
$$

Zu b) Wiederholte Teilung durch $(x-1)$ mit Horner Schema ergibt

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 4 & -2 & -5 \\
1 & & 1 & 3 & 7 & 5 \\
\hline
 & 1 & 3 & 7 & 5 & \mathbf{0} \\
1 & & 1 & 4 & 11 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 11 & \mathbf{16} & \\
1 & & 1 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & 5 & \mathbf{16} & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & \mathbf{6} & & &
\end{array}
$$

$$p(x) = (x-1)^4 + 6(x-1)^3 + 16(x-1)^2 + 16(x-1)^1 + 0\,.$$