Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

NEXT LEVEL-1-

Erste Vorlesung

Aussagen, Mengen, Vereinbarungen, Funktionen, Vollständige Induktion

Die ins Netz gestellten Kopien der Folien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig. Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

1.1. Aussagen sind sprachliche Gebilde, die eindeutig **wahr** oder **falsch** sind. Einer Aussage wird der **Wahrheitswert** w (bzw. 1) oder f (bzw. 0) zugeordnet.

Aussagen kann man verknüpfen. Zum Beispiel

Aussage A : zwei ist eine gerade Zahl. (wahr)

Aussage B : zwei ist eine Primzahl. (wahr)

Aussage C : $2 \cdot 3 = 5$ (falsch)

Dann ist $A \wedge B$ wahr, $A \wedge C$ falsch, $A \vee B$ wahr.

Merke : Das mathematische oder ist kein entweder oder. Genauer:

Konjunktion (und)

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Adjunktion/Disjunktion (oder), bzw. **Negation** von A : $\neg A$

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	$\neg A$
1	0
0	1

Implikation $B \vee \neg A$**,** bzw. **Äquivalenz**

A	B	$A \Longrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Oft hilfreich : Regeln von D'Morgan
$$\begin{aligned} \neg\,(A \vee B) &= \neg A \;\wedge\; \neg B \\ \neg\,(A \wedge B) &= \neg A \;\vee\; \neg B \end{aligned}$$

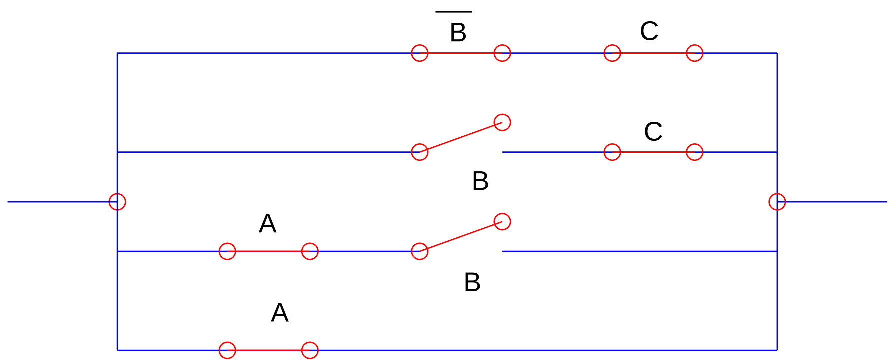
und **Distributivgesetze:**

$$A \wedge (B \vee C) \;=\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad A \vee (B \wedge C) \;=\; (A \vee B) \wedge (A \vee C)\,.$$

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Beispiel Schaltkreis:



1.2. Mengen:

Eine **Menge** M ist (nach CANTOR) eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem Ganzen.
Beispiele:

$M_1 :=$ { Gabel, Messer, Schere, Licht}

$M_2 := \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

$M_3 := \{x : x$ ist ein deutscher Monatsname $\}$

Die zu einer Menge M zusammengefassten Objekte heißen **Elemente** von M.

Gabel $\in M_1$, $\qquad 4 \in M_2$, $\qquad 0.5 \notin M_2$

Wir setzen voraus, dass wir stets entscheiden können, ob ein gegebenes Objekt zu einer gegebenen Menge gehört. D.h. es gilt stets

$$\text{entweder } x \in M \qquad \text{oder} \qquad x \notin M$$

Seien A und B Mengen. Dann definieren wir:

$\emptyset$	Leere Menge : enthält kein Element.
$A \cup B$	A vereinigt B $:= \{x : x \in A$ oder $x \in B\}$.
	Zum Beispiel :$\{1,3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\}$
$A \cap B$	A geschnitten B $:= \{x : x \in A$ und $x \in B\}$.
	Zum Beispiel :$\{1,3\} \cap \{1,2\} = \{1\}$
$A \setminus B$	A ohne B $:= \{x : x \in A$ und $x \notin B\}$.
	Zum Beispiel : $\{1,3\} \setminus \{1,2\} = \{3\}$
$B \subset A$	B Teilmenge $A \Longleftrightarrow (x \in B \Longrightarrow x \in A)$
	Zum Beispiel : $\{1,3\} \subset \{1,2,3,40,70,567\}$

Symbole/Vereinbarungen:

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $= \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
	$= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
	$= \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ m, n$ teilerfremd$\}$
$x \in M$	x ist ein Element der Menge M, z.B. $2 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$\forall$	für alle , zum Beispiel : $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 \geq x$.
$\exists$	es gibt , zum Beispiel : $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 < x$.
$\wedge$	und : $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.
$\vee$	oder : $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Die bisher eingeführten Zahlen kann man auf einer Zahlengeraden abtragen, und mit den Punkten der Geraden identifizieren. Man zeichnet eine Gerade, legt einen Punkt als Null und einen anderen als Eins fest, womit man eine Einheit und eine positive Richtung festlegt. Alle Zahlen aus $\mathbb{Q}$ lassen sich dann mit Zirkel und Lineal konstruieren. Zu jeder Zahl aus $\mathbb{Q}$ gibt es genau einen Punkt der Geraden. Umgekehrt gibt es aber Punkte der Geraden, zu denen es keine rationale Zahl gibt (Beweis : vor Ort). Diese identifizieren wir mit den **irrationalen Zahlen**. Die Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden definiert als die Vereinigung der rationalen (periodischen Dezimalzahlen) und der irrationalen (nicht periodischen Dezimalzahlen) Zahlen.

Jeden Punkt der obigen Geraden kann man mit genau einer Zahl aus $\mathbb{R}$ identifizieren und umgekehrt.

In $\mathbb{R}$ kann man addieren, substrahieren, multiplizieren, dividieren. Dabei bedeutet **in** $\mathbb{R}$, dass das Ergebnis dieser Operationen mit reellen Zahlen wieder eine reelle Zahl ist. Anders sieht es mit dem Potenzieren aus. Beispiel:

$$\forall x \in \mathbb{R} \implies y = x^2 \in \mathbb{R}$$

Wie sieht es mit der Umkehrung aus?

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Frage: $\quad \exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = y \iff x = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \quad ?????$

Natürlich nicht! Zum Beispiel

$$y = -1 \implies \nexists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$$

In $\mathbb{R}$ ist die Wurzelfunktion* $\sqrt{}$ nur für nicht negative Argumente definiert und nimmt nur nicht negative Werte an:

$$w : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad w : x \mapsto \sqrt{x} \geq 0$$

Wenn wir beide reellen Zahlen x_1 und x_2 meinen, für die $x^2 = y \in \mathbb{R}^+$ gilt, schreiben wir $\pm\sqrt{y}$. Zum Beispiel: $\sqrt{4} = 2 \qquad \pm\sqrt{4} = \pm 2$

*) Hoppla? Was heißt eigentlich Wurzelfunktion? Ist die saubere Definition einer **Funktion** aus der Schule bekannt? (siehe 2. Vorlesung)

Die Menge der reellen Zahlen bildet mit den Operationen $+$, $\cdot$ einen Körper. D.h. es gilt $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lcl}
x + (y + z) & = & (x + y) + z \\
x + 0 & = & 0 + x = x \\
x \cdot (y \cdot z) & = & (x \cdot y) \cdot z \\
x \cdot 1 & = & 1 \cdot x = x \\
x \cdot (y + z) & = & x \cdot y + x \cdot z\,.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
x + y & = & y + x \\
x + (-x) & = & (-x) + x = 0 \\
x \cdot y & = & y \cdot x \\
x \cdot (x^{-1}) & = & (x^{-1}) \cdot x = 1 \quad x \neq 0
\end{array}$$

Die Menge der reellen Zahlen ist **geordnet**. D.h. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccccc}
(x \leq y & \vee & y \leq x)\,, & \wedge & x & \leq & x \\
x \leq y & \wedge & y \leq z & \Longrightarrow & x & \leq & z \\
x \leq y & \wedge & y \leq x & \Longrightarrow & x & = & y \\
x \leq y & \Longrightarrow & x + z & \leq & y + z & & \\
x \leq y & \wedge & z \geq 0 & \Longrightarrow & x \cdot z & \leq & y \cdot z
\end{array}$$

Vollständigkeitsaxiom von Dedekind: Sei

$$(\mathbb{R} = L \cup R, \quad L,\, R \neq \emptyset\,) \quad \wedge \quad (x < y \quad \forall\, x \in L \wedge y \in R).$$

Dann existiert genau ein $s \in \mathbb{R}$ (genannt Schnittzahl) mit

$$x \leq s \leq y \qquad \forall\, x \in L \wedge y \in R\,.$$

Beträge:

$$|a| := \sqrt{a^2} \geq 0 = \text{ Abstand von } a \text{ zu Null}$$

$$|x - a| := \sqrt{(x-a)^2} \geq 0 = \text{ Abstand von } a \text{ zu x}$$

BEISPIEL

$|x - 2| \leq 1 \iff 1 \leq x \leq 3 \iff x \in [1, 3]$ (abgeschlossenes Intervall)

$$|x-2| < 1 \iff 1 < x < 3 \iff x \in]1,3[$$ (offenes Intervall)

Rechenregeln für Beträge:

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| < y \iff -y < x < y$,

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \,, \qquad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$ **Dreiecksungleichung**

Anwendungsgebiete: Beschreibung geometrischer Gebilde, sehr bald bei der Abschätzung von Fehlern von Näherungsverfahren bzw. Abbruchfehlern bei Berechnung von eigentlich unendlich langen Ausdrücken etc. etc.

Beispiel 1: Wir definieren den $\mathbb{R}$ hoch zwei, wie folgt

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; : \; x,\, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Punktepaare $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus dem $\mathbb{R}^2$ können in einem Koordinatensystem eingetragen werden. Skizzieren Sie folgende Mengen:

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; : \; x,\, y \in \mathbb{R}\,,\; |x| + |y| \;\leq 4 \right\}$$

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; : \; x,\, y \in \mathbb{R}\,,\; |x| \leq 2\,,\; x^2 + y^2 \;\leq 16 \right\}$$

$$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; : \; x,\, y \in \mathbb{R}\,,\; \max\{|x|, |y|\} \;\leq 2\,, \right\}$$

Beispiel 2:

Eine Funktion f modelliert einen physikalischen Zusammenhang,

z.B. Druck = f(Temperatur), $\quad p = f(t), \quad t \in [a,b]$.

Verlauf von f : sehr kompliziert

Idee : ersetze f (stückweise) durch einfache Funktionen p

Fehler : $|f(t) - p(t)|, \qquad t \in [a,b]$

Frage : Wie schlimm kann der Fehler sein?

Konkreter: Nehmen wir an, für $-0.1 \leq t \leq 0.1$ gelte

$$A(t) := |f(t) - p(t)| \leq \left| \frac{t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}(t-0.1)^5}{1 - \frac{1}{2!}t^2} \right| .$$

Tolerierbar sei ein maximaler absoluter Fehler von 0.2. Wird diese Schranke eingehalten? Fehlerabschätzung z.B. wie folgt:

$$A(t) \leq \frac{\left| t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}(t-0.1)^5 \right|}{\left| 1 - \frac{1}{2!}t^2 \right|}$$

$$\leq \frac{|t| + \left| \frac{-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 \right| + \left| \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}(t-0.1)^5 \right|}{\left| 1 - \frac{1}{1 \cdot 2}t^2 \right|}$$

$$\leq \frac{0.1 + \left| \frac{1}{6}0.1^3 \right| + \left| \frac{1}{120}(-0.1-0.1)^5 \right|}{\left| 1 - \frac{1}{2!}t^2 \right|}$$

$$A(t) \leq \frac{0.1 + \frac{0.001}{6} + \frac{0.00001 \cdot 2^5}{120}}{1 - \frac{t^2}{2}}$$

$$\leq \frac{0.1 + \frac{0.001}{6} + \frac{0.00001 \cdot 32}{120}}{1 - \frac{0.1^2}{2}}$$

$$\leq \frac{0.2 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001\cdot 64}{120}}{2 - 0.01}$$
$$\leq \frac{0.2 + 0.001 + 0.001}{1.5} \leq \frac{0.3}{1.5} = 0.2.$$

Natürlich hätten wir es hier noch genauer ausrechnen können (Min/Max), so reicht es aber auch! **Merke :** Eine Abschätzung/eine Schranke ist gut genug, wenn Sie ihren Zweck erfüllt!

Beispiel 3: Es gilt (Beweis später)

$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}\,x^5 - \tfrac{1}{7!}\,x^7 \pm \cdots$$

und

$$\left|\sin(x) - \left(x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}\,x^5\right)\right| \leq \tfrac{1}{7!}|x|^7 \qquad \forall\,|x| \leq \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Für $|x|$ klein, sind also die ersten drei Summanden der eigentlich unendlichen Summe eine gute Näherung für den Wert von $\sin(x)$.

Bemerkung: Wir setzen hier vorübergehend voraus, dass Sinus als periodische Funktion, Bogenmaß, Symmetrie von Sinus und $n!$ aus der Schule bekannt sind. Dieses Beispiel kann aber auch beim ersten Lesen ausgelassen werden.

Frage: Wie genau ist die Approximation
$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}(x)^5$
für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ mindestens?

Also wie groß ist der absolute Fehler höchstens?

Ist das eine akzeptable/gute Näherung?

Noch mehr Definitionen: Sei $M \subset \mathbb{R}$.

- Jede Zahl $C \in R$ für die $x \leq C, \forall x \in M$ gilt, heißt **Obere Schranke** von M.

- Jede Zahl $c \in R$ für die $x \geq c, \forall x \in M$ gilt, heißt **untere Schranke** von M.

- M heißt **nach oben (bzw. unten) beschränkt** falls es eine obere (bzw. untere) Schranke von M gibt.

- Die kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von M heißt (im Falle der Existenz) **Supremum** (bzw. **Infimum**) von M $\sup M$ (bzw. $\inf M$).

$M_1 := \{x^2 : 0 < x \leq 0.5\}$

$M_2 := \{x = 3k : k \in \mathbb{N}\}$

$$M_3 := \{\frac{1}{x} : x \in \ [1,2)\} \ =]\tfrac{1}{2},\, 1]$$

Die Menge M_3 besitzt unendlich viele obere Schranken z.B. 2009. Die kleinste obere Schranke ist 1. Es gilt

$$\sup M = \ 1 \ \in \ M \, .$$

Liegt das Supremum der Menge M in der Menge, so wird es auch **Maximum von M** genannt. Analog ist das **Minimum von M** definiert.

Für M_3 gibt es wieder unendlich viele untere Schrankten, z.B. 0. Offensichtlich ist die kleinste untere Schranke

$$\inf M = \ 0.5 \ \notin \ M \, .$$

Es existiert ein Infimum, welches nicht zur Menge selbst gehört. Hier sagt man, dass M **kein Minimum** besitzt. Eine Menge kann also beschränkt sein ohne Minmum und Maximum zu besitzen. Es gilt aber der folgende Satz, den man mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms beweist.

SATZ: Jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum(Infimum).

Summen/Produkte:

Situation : Es soll die **Summe** vieler Ausdrücke bestimmt werden, die sich in Abhängigkeit von aufeinander folgendenen ganzen Zahlen darstellen lassen. Zum Beispiel:

$$S := 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+\cdots+20+21$$

oder wie oben

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}(x)^5 - \frac{1}{7!}(x)^7 \pm \cdots$$

Wir schreiben im ersten Fall abkürzend

$$\sum_{k=1}^{21} k\,.$$

Das Symbol $\sum$ besagt, dass summiert wird, und zwar über eine Größe a_k, die i.d.R. vom sogenannten **Laufindex** k abhängt (hier einfach $a_k = k$).

Der Laufindex läuft von einer unteren Grenze (Startindex) aus $\mathbb{Z}$ (hier 1) bis zu einer oberen Grenze (Endindex) aus $\mathbb{Z}$ (hier 21), und wird in jedem Schritt um Eins erhöht (oben durchläuft k die Werte $1, 2, 3, \cdots, 21$).

Es wird die Summe über die Werte von a_k gebildet.

Vorzeichenwechsel: $(-1)^k$ oder $(-1)^{k\pm 1}$ als Faktor hinzufügen:

$$4-6+8-10+12-14+16-18+20-22=\sum_{k=2}^{11}(-1)^k\,2k$$

$$1-4+9-16+25-36+49-64+81-100=\sum_{k=?}^{?}???$$

Zweier, dreier, hunderter Schritte :
ersetze k durch $2k$, $3k$, $100k$

$$6^2+9^2+\cdots+30^2=\sum_{k=2}^{10}(3k)^2$$

Übung: Wie schreiben wir also den Sinus?

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}(x)^5 - \frac{1}{7!}(x)^7 \pm \cdots = \sum ????$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=3}^{20}(k+1)(k-1)\ -\sum_{k=2}^{19}(k+3)(k-2)$$

setze $l=k-1$ oder $k=l+1$ in die erste Summe ein

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{20}(k+1)(k-1)\ -\sum_{k=2}^{19}(k+3)(k-2)\\
&\qquad = \sum_{l=3-1}^{20-1}(l+1+1)(l+1-1)\ -\sum_{k=2}^{19}(k+3)(k-2)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{l=2}^{19} (l+2)l \; - \sum_{k=2}^{19}(k^2+k-6) = \sum_{k=2}^{19} k(k+2) \; - \sum_{k=2}^{19}(k^2+k-6)$$

$$= \sum_{k=2}^{19} k^2+2k-(k^2+k-6) \; = \sum_{k=2}^{19} k+6 = \sum_{k=2}^{19} k + \sum_{k=2}^{19} 6 \; = ?$$

Produkte: Analog definiert man

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \cdots \cdot a_n$$

Beispiel: $$\prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n \; = \; n! \qquad (n \textit{ Fakultät})$$

Dieser Ausdruck bekommt einen eigenen Namen, nämlich n *Fakultät*, weil er recht häufig auftritt.

In Analysis I : z.B. bei Fehlerabschätzungen,

in Analysis II : z.B. bei der Definition von Sinus, Cosinus, Exponentialfunktion,

in der Wahrscheinlichkeitsrechnung am laufenden Band z.B. gilt: Es gibt $n!$ verschiedene Möglichkeiten n verschiedene Objekte zu sortieren.

1.3. Funktionen

Gegeben seien zwei Mengen D und B. Eine **Funktion (Abbildung)** f von D nach B ordnet jedem Element aus D genau ein Element aus B zu.

$$f \,:\, D \to B, \qquad f \,:\, x \mapsto y, \quad f(x) = y\,.$$

D heißt **Definitionsbereich** der Abbildung und B heißt **Bildbereich** der Abbildung.

Bild von $A \subset D := \{y \in B : \exists x \in D : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$

Urbild von $C \subset B := \{x \in A : \exists y \in C : y = f(x)\} = \{x \in A : f(x) \in C\}$

f heißt **surjektiv**, wenn $B = f(D)$, d.h

$$\forall\, y \in\ B\ :\ \exists\, x \in\ D\ :\ y = f(x)$$

d.h. die Gleichung $y = f(x)$ hat für alle $y \in B$ mindestens eine Lösung $x \in D$.

f heißt **injektiv**, wenn

$$x_1,\, x_2\ \in\ D \wedge x_1 \neq x_2 \Longrightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$$

d.h. die Gleichung $y = f(x)$ hat für jedes $y \in B$ höchstens eine Lösung $x \in D$.

f heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist. Bijektive

Funktionen besitzen **Umkehrfunktionen**:

$$f^{-1} \,:\, B \to D \quad f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x\,.$$

Beispiel:

$f \;:\; \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$: injektiv, nicht surjektiv

$f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \quad f(x) = x^2$: surjektiv, nicht injektiv

$f \;:\; \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \quad f(x) = x^2$: bijektiv

$f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$: weder surjektiv noch injektiv

Elementare Funktionen

- **(Affin-)Lineare Funktionen** : $y = mx + b = a_1 x + a_0$.

- **Polynome** : $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- **Exponentialfunktionen** : werden erst später sauber eingeführt. Aus der Schule bekannt

  $$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^0 = 1 \qquad a \in \mathbb{R}^+ .$$

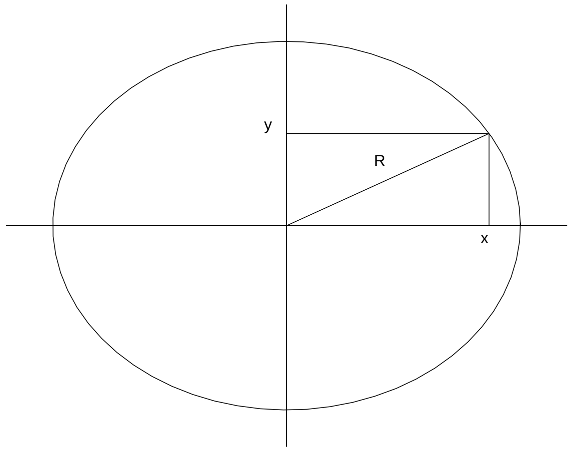
  $$(e^x)' = e^x, \qquad e = 2.7182818 \cdots =: \text{Eulersche Zahl.}$$

- **Logarithmus Funktionen** : Umkehrung der Exponentialfunktionen

$$\ln(e^x) = x, \qquad \log_a(a^x) = x, \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) .$$

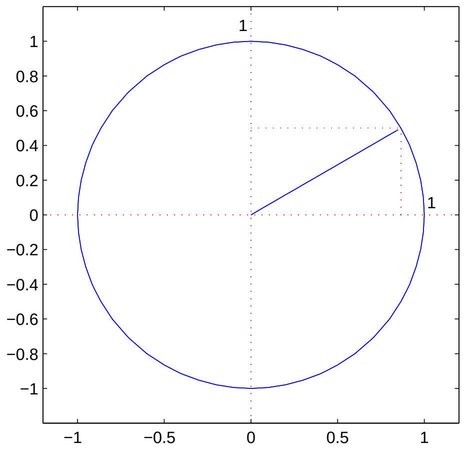
- **Trigonometrische Funktionen** :$\sin(x)$, $\cos(x)$. Wir rechnen im Bogenmaß: $360° = 2\pi$.

  Gegeben : Punkt mit Koordinaten x und y. ϕ: Winkel zwischen $x-$Achse und Ortsvektor $\binom{x}{y}$ entgegen Uhrzeigersinn gemessen.



$$x^2 + y^2 = R^2$$
$$x = R\cos(\phi)$$
$$y = R\sin(\phi)$$

Speziell für $R = 1$ (Einheitskreis): $x = \cos(\phi)$, $y = \sin(\phi)$.



Umfang des Einheitskreises: $2\pi \longrightarrow$ Bogenlänge zu 360° $= 2\pi$

Umfang des halben Einheitskreises: $\pi \longrightarrow$ Bogenlänge zu 180° $= \pi$

Allgemein: Bogenlänge ϕ, die zu einem Winkel mit g Grad gehört: $\dfrac{\phi}{\pi} = \dfrac{g}{180}$

Aus der Geometrischen Interpretation ist unmittelbar klar:

Periodizität :

$$\cos(2\pi + x) = \cos(x) \qquad \sin(2\pi + x) = \sin(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Symmetrie :

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Pythagoras : $\cos^2(x) + \sin^2(x) \;:=\; (\cos(x))^2 \;+\; (\sin(x))^2 \;=\; 1$

Additionstheoreme:

$$\cos(x + y) \;=\; \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x + y) \;=\; \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

Häufig benutzte Werte :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	-1

2.1. Natürliche Zahlen, Vollständige Induktion:

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ wird durch die **Peano Axiome** definiert:

- $1 \in \mathbb{N}$,
- $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$,
- $n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m \Longrightarrow n+1 \neq m+1$,
- $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (n+1) \neq 1$,
- Sei $M \subset \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1 \in M \wedge (n \in M \Longrightarrow (n+1) \in M)) \Longrightarrow M = \mathbb{N}.$$

Prinzips der vollständigen Induktion

Situation : Eine Aussage A(n), die von der Zahl $n \in N$ abhängt, soll für alle $n(\geq n_0)$ aus $\mathbb{N}$ bewiesen werden. Zum Beispiel:

- Behauptung a) Für jede beliebige natürliche Zahl n gilt: Die Summe der ersten n natürlichen Zahl ist $\frac{n(n+1)}{2}$. Also:

$$\sum_{k=1}^{n} k \;=\; 1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

- Behauptung b) $\forall\, n \in\; \mathbb{N}$ gilt: Es gibt $n!$ verschiedene Möglichkeiten n verschiedene Objekte zu sortieren.

Eine Methode solche Aussagen zu beweisen, ist die vollständige Induktion. Diese besteht aus drei Schritten:

Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = n_0$ bewiesen. Für uns erst einmal $n_0 = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Man setzt voraus, dass die Aussage für irgendein m aus $\mathbb{N}$ gilt. Man sagt hier oft m sei beliebig aber fest.

Induktionsschritt: Man beweist, dass die Aussage dann auch für $m + 1$ gilt.

Nach diesen drei Schritten folgt (anschaulich nach dem Dominoprinzip, mathematisch nach PEANO), dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt.

Beispiele:

A) Behauptung a: $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gelte :

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m \cdot (m+1)}{2}.$$

Induktionsschritt: Zu zeigen $\sum_{k=1}^{m+1} k = \frac{((m+1)+1) \cdot (m+1)}{2}$

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} k\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right) + (m+1)$$

(Zerlegung der Summe in bekannt und Neuzugang)

$$= \frac{m \cdot (m+1)}{2} + (m+1)$$

(Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung)

$$= \frac{m \cdot (m+1) \; + 2 \cdot (m+1)}{2}$$

(gemeinsamer Nenner)

$$= \frac{(m+2) \cdot (m+1)}{2} = \frac{((m+1)+1) \cdot (m+1)}{2}$$

(Umformen auf die behauptete Form)

B) Induktionsanfang nicht bei 1 :

$\forall\, k \geq 3,\ k \in \mathbb{N}\ : \quad k^2 \geq\ 2k+1.$

Induktionsanfang: Für $k = 3$ ist die Behauptung wahr, denn es gilt

$$3^2\ >\ 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$ gelte $k^2 \geq\ 2k+1.$

Induktionsschritt: zu zeigen $\quad (k+1)^2\ \geq\ 2(k+1)+1.$ Beweis:

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &=\ k^2+2k+1 = k^2+(2k+1) && \text{Zerlegung in alten + neuen Term}\\
&\geq\ 2k+1+(2k+1) && \text{Einsetzen der Induktionsvoraussetzung}\\
&=\ 2k+2+2k = 2(k+1)+2k && \text{Umformen in Richtung der Behauptung}\\
&>\ 2(k+1)+1 \qquad \square.
\end{aligned}$$

C) Bernoullische Ungleichung :

Beh. : $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2$ und $\forall a \in \mathbb{R},\, a > -1, a \neq 0$ gilt

$$(1+a)^n \;>\; 1+na.$$

Beweis:
Induktionsanfang: Für $n = 2$ ist die Behauptung wahr, denn es gilt

$$(1+a)^2 \;=\; 1+2a+a^2 > \; 1+2a \qquad \forall\, a \neq 0.$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gelte $(1+a)^n \;>\; 1+na.$

Induktionsschritt: zu zeigen $(1+a)^{n+1} \;>\; 1+(n+1)a.$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) && \text{Zerlegung in alten und neuen Term} \\
&> (1+na)(1+a) && \text{Einsetzen der Induktionsvoraussetzung} \\
&= 1+na+a+na^2 && \text{Umformen in Richtung der Behauptung} \\
&> 1+(n+1)a && \square.
\end{aligned}
$$

Übung : Wo hat man die Voraussetzung $a > -1$ gebraucht?

D) Sie kennen die binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 \quad + 2\,a^1 b^1 \quad + b^2.$$

Behauptung : $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\; a^{n-k}\, b^k$$

wobei die sogenannten **Binomialkoeffizienten** wie folgt definiert sind:

$$\binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \binom{n}{n} \;:=\; \binom{n}{0} \;:=\; 1.$$

Beweis :

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr, denn es gilt

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b\,.$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gelte

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Induktionsschritt: zu zeigen $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \quad \text{Zerlegung in alten und neuen Term}$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \quad \text{Einsetzen der Induktionsvoraussetzung}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \quad \text{Indexverschiebung}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n-(l-1)}\, b^l \quad \text{k=l-1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1-0}\, b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k \quad \text{Anpassen der Summen}$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l}\, b^l + \binom{n}{(n+1)-1} a^{n+1-(n+1)}\, b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k$$

$$+ \binom{n}{n} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$+ \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \qquad \square$$

Hierbei haben wir für die vorletzte Gleichung verwendet:

Übung: Zeigen Sie direkt (durch Einsetzen der Definition)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Aus der letzten Identität erhält man das **Pascalsche Dreieck** zur Berechnung der Koeffizienten von $(a+b)^n$:

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad (a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3\,.$$

Zwei weitere Beweismethoden

Gegenbeispiele:

Behauptung: Für jede beliebige natürliche Zahl n gilt: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n-1)}{2}$.

Da die Behauptung lautet **für jede** natürliche Zahl, genügt ein einziges Gegenbeipiel, was natürlich möglichst einfach seien sollte. Man rechnet z.B.

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \neq \frac{1(1-1)}{2} = 0\,.$$

Damit ist die Behauptung widerlegt.

Indirekter Beweis: Zu zeigen sei $A \Longrightarrow B$.

Zeige: Aus der Annahme $\neg B \wedge A$ folgt ein Widerspruch.

D.h.: wenn A wahr ist, kann $\neg B$ nicht wahr sein, also muss B wahr sein.

Bekanntes Beispiel: Zu zeigen: $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R} : |2ab| \leq a^2 + b^2$.

Annahme : $\exists\, a,\, b \in \mathbb{R} : |2ab| > a^2 + b^2$.

Dann folgt

$$\begin{aligned} |2ab| > a^2 + b^2 &\iff |2ab|^2 > (a^2 + b^2)^2 \\ &\iff 4a^2b^2 > a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \\ &\iff 0 > a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 \qquad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Einige aus der Schule bekannte Begriffe:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$.

m heißt **Teiler** von $n \Longleftrightarrow: m|n \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : n = k \cdot m$.

$n > 1$ heißt **Primzahl**, wenn $m|n \Longrightarrow m = 1 \vee m = n$.

SATZ: Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutige **Primfaktorzerlegung**

$$n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}, \qquad k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{N},\ p_1, \cdots, p_m \text{ Primzahlen}$$

BEWEISSKIZZE: Vollst. Induktion. Anfang mit $n = 2^1$.

Schritt: entweder ist (n+1) eine Primzahl, dann ist man fertig oder $n + 1 = m \cdot k$ mit $m, k < n + 1$, dann setzt man die Induktionsvoraussetzung ein.

Seien wieder $n,\ m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann definiert man

Größter gemeinsamer Teiler von n und m =

$$ggT(n,m) := \max\{k \in \mathbb{N} : k|m \wedge k|n\}.$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches von n und m =

$$kgV(n,m) := \min\{k \in \mathbb{N} : m|k \wedge n|k\}.$$

Beispiel :

$$n := 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60 \qquad m := 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 350$$

$$ggT(n,m) = 2^1 {\cdot} 3^0 {\cdot} 5^1 {\cdot} 7^0 \;=\; 10\,, \qquad kgV(n,m) = 2^2 {\cdot} 3^1 {\cdot} 5^2 {\cdot} 7^1 \;=\; 2100\,.$$

Euklidischer Algorithmus:

Setze $r_0 = m$, $r_1 = n$ und rechne so lange bis $r_{k+1} = 0$:

$$r_{k-1} \;=\; q_k \cdot r_k \;+\; r_{k+1} \qquad 0 \le\; r_{k+1} < r_k\,.$$

Beispiel : $r_0 = 350 = q_1 r_1 + r_2 = 60 q_1 + r_2 = 5 \cdot 60 + 50 \implies r_2 = 50\,,$

$r_1 = 60 = q_2 r_2 + r_3 = 50 q_2 + r_3 = 1 \cdot 50 + 10 \implies r_3 = 10\,,$

$r_2 = 50 = q_3 r_3 + r_4 = 10 q_3 + r_4 = 5 \cdot 10 + 0 \implies ggT(60, 350) = 10\,,$

$$\mathsf{kgV}(60, 350) = \frac{60 \cdot 350}{ggT(60, 350)} = 6 \cdot 350 = 2100\,.$$