Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

NEXTLEVEL im WiSe 2011/12

Vorlesung 7

Kurvendiskussion

7. Kurvendiskussion

Zur Erinnerung:

Definition 7.1 : Extrema $[a, b] \subset \mathbb{R},\ f : [a, b] \to \mathbb{R}$

f besitzt in $x_0 \in [a, b]$ ein **lokales Minimum**, wenn es eine $\epsilon-$ Umgebung U (hier $]x_0 - \epsilon,\ x_0 + \epsilon[$) von x_0 gibt, so dass

$$f(x_0)\ \leq f(x) \qquad \forall\, x \in U\ \cap\ [a, b] \qquad (*)$$

gilt.

f besitzt in $x_0 \in [a, b]$ ein **lokales Maximum**, wenn

$$f(x_0)\ \geq f(x) \qquad \forall\, x \in U\ \cap\ [a, b] \qquad (**)$$

f besitzt in $x_0 \in [a, b]$ ein **striktes (echtes)** lokales Minimum bzw. Maximum, wenn in (*) bzw. (**) das $\leq$ bzw. $\geq$ Zeichen durch $<$ bzw. $>$ ersetzt werden kann.

Gilt sogar

$$f(x_0) \ \leq (\text{ bzw. } \geq) \, f(x) \qquad \forall \, x \in [a,b]$$

so hat f in x_0 ein **globales (absolutes)** Minimum bzw. Maximum.

Extremalstelle/Extremum : Sammelbegriff für Minimum oder Maximum.

Weiter oben gezeigt: Ist f differenzierbar auf $I = [a,b]$, Dann gilt

- f konstant $\iff f'(x) = 0 \quad \forall \, x \in I$
- f (streng) monoton wachsend $\iff f'(x) \geq 0 \, (> 0) \quad \forall \, x \in I$

- f (streng) monoton fallend $\iff f'(x) \leq 0\,(< 0) \quad \forall\, x \in I$

Da f unmittelbar vor einem Minimum fallen und nach einem Minimum steigen muss, bzw. vor einem Maximum steigen und nach einem Maximum fallen muss, folgt:

Notwendiges Kriterium für Extrema

Liegt in x_0 ein Extremum einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vor, so gilt

$$\boxed{f'(x_0) \;=\; 0 \qquad \text{oder } x_0 \text{ Randpunkt.}}$$

ACHTUNG: notwendiges aber nicht hinreichendes Kriterium. Beispiel?

Satz 7.1 : hinreichendes Kriterium für Extrema

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf [a,b] und $f'(x_0) = 0$. Dann gilt

- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow$ in x_0 lok. Minimum

- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow$ in x_0 lok. Maximum

ACHTUNG: $f''(x_0) > 0$ kein notwendiges Kriterium. Beispiel?

Beweis von Satz 7.1

Ist f'' in x_0 positiv, so auch in einer Umgebung von x_0. Nach Taylor gilt mit $\alpha =$ Zwischenstelle::

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\; + \;\frac{f''(\alpha)}{2!}\,(x - x_0)^2\,.$$

Wegen $f'(x_0) \;=\; 0$ folgt

$$f(x) - f(x_0) \;=\; \frac{f''(\alpha)}{2!}\,(x - x_0)^2\,.$$

Also nahe genug an x_0

$$f(x) - f(x_0) \;>\; 0.$$

BEMERKUNGEN:

- Ist $f''(x_0) = 0$ und f dreimal stet. diffb., so folgt analog:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x - x_0)^3 \qquad \alpha \in [a, b]\,.$$

Verschwindet die dritte Ableitung in x_0 nicht, so tut sie es auch in einer Umgebung von x_0 nicht, und es liegt ein Sattelpunkt (horizontaler Wendepunkt) vor.

- Ist $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ und f vier mal stet. diffb., so

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!}(x - x_0)^4 \qquad \alpha \in [a, b]\,.$$

$f^{(4)}(x_0) > 0 \Longrightarrow$ Minimum, $f^{(4)}(x_0) < 0 \Longrightarrow$ Maximum.

- Analog folgt für hinreichend oft stetig diff.bare Funktionen:

Ist die erste nichtverschwindende Ableitung von gerader Ordnung: Min/Max

Ist die erste nichtverschwindende Ableitung von ungerader Ordnung: Sattel

- Globale Extrema:

  Bestimme alle Kandidaten für lokale Extrema ($f' = 0$).

  Vergleiche Funktionswerte der Kandidaten + Randpunkte.

  Existenz gesichert falls Intervall beschränkt und abgeschlossen.

Monotonieverhalten

Aus dem Satz von Taylor folgt unmittelbar: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in (a,b), dann gilt

$$
\begin{aligned}
\forall\, x \in (a,b) : f'(x) \geq 0 &\iff f \text{ **monoton wachsend**} \\
&\iff (x_1 > x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)), \\
\forall\, x \in (a,b) : f'(x) \leq 0 &\iff f \text{ **monoton fallend,**} \\
&\iff (x_1 > x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)), \\
\forall\, x \in (a,b) : f'(x) > 0 &\iff f \text{ **streng monoton wachsend,**} \\
&\iff (x_1 > x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)), \\
\forall\, x \in (a,b) : f'(x) < 0 &\iff f \text{ **streng monoton fallend.**} \\
&\iff (x_1 < x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)).
\end{aligned}
$$

Krümmungsverhalten

Definition 7.2 : Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in (a,b). Dann heißt f **konvex (konkav)**, wenn

$$\forall x \in \ (a, b) \ : \quad f''(x) \geq \ (\leq)\, 0$$

gilt.

Der Graph einer kovexen (konkaven) Funktion liegt oberhalb (unterhalb) seiner Tangenten.

Definition 7.3 : Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. $x_0 \in (a, b)$ heißt **Wendepunkt** von f, wenn sich das Konvexitätsverhalten von f in x_0 ändert. Genauer:

$\exists\, \epsilon > 0 \ : f$ ist konvex (konkav) für $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und konkav (konvex) für $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$.

Ist f eine C^3-Funktion, so gilt:

x_0 Wendepunkt $\Longrightarrow f''(x_0) = 0$,

$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ Wendepunkt, **Rechts-Linkskurve**,

$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ Wendepunkt, **Links-Rechtskurve**.

Asymptotisches Verhalten

Eine Funkion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ hat im Punkt $x_0 \in D'$ einen **Pol**, wenn es eine in x_0 stetige Funktion g gibt, so dass

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}, \quad g(x_0) \neq 0$$

gilt. Für gerade (ungerade) k : Pol ohne (mit) Vorzeichenwechsel.

Beispiel : Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) := \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ hat einen Pol ohne Vorzeichenwechsel in $x_0 = 1$, hier gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

Die Funktion $\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$ hat einen Pol mit Vorzeichenwechsel in

$x_0 = 1$, hier gilt

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty \,.$$

Definition 7.4 : Eine Gerade $g(x) := ax + b$ mit

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

heißt **Asymptote** von f für $x \to \pm\infty$. Im Falle der Existenz einer solchen Geraden gilt

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) \,.$$

Beispiel : $\quad f(x) := \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{4x}{x^2-2x+1}\right) = 1\,.$$

Oder mit l'Hospital:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = 1.$$

D.h. $g(x) = 1$ ist eine Asymptote von f für $x \to \pm\infty$.

Beispiel : $$f(x) := \frac{(x+1)^2}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x+3+\frac{4}{x^2-2x+1}\right)$$

oder

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+2}{1} \pm\infty.$$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3-2x^2+x}\right) = 1\,.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x+3+\frac{4}{x^2-2x+1}-x\right) = 3\,.$$

D.h. $g(x) = x+3$ ist eine Asymptote von f für $x \to \pm\infty$.

Symmetrien

Die Funktion f ist **gerade** d.h. der Graph ist **achsensymmetrisch zur y-Achse** , genau dann wenn

$$\forall\, x: \; f(-x) = f(x)$$

Die Funktion f ist **ungerade** d.h. der Graph ist **punktsymmetrisch zum Nullpunkt** , genau dann wenn

$$\forall\, x: \; f(-x) = -f(x)$$

Beispiele :
x^{2m}, $\cos(mx)$, $m \in \mathbb{Z}$ sind gerade, und
x^{2m+1}, $\sin(mx)$, $m \in \mathbb{Z}$ sind ungerade.

Kurvendiskussion:

Gegeben sei eine Rechenvorschrift $y = f(x)$. Zu klären sind oft folgende Punkte:

- (Maximaler) Definitionsbereich $\subset \mathbb{R}$,
- asymptotisches Verhalten ($x \to \pm\infty$), Pole etc.
- Nullstellen
- Extrema, Monotonie
- Krümmungsverhalten (Konvexität/Konkavität)
- Symmetrien

- Bildbereich

- Evtl. Skizze

Beispiel: $$f(x) = \frac{(x+1)^4}{(x^2-1)^2}$$

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, für $x = -1$ liegt eine hebbare Singularität vor. Es gilt

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \qquad \forall x \in D \cdot$$

- asymptotisches Verhalten ($x \to \pm\infty$), Pole etc.

  Grenzwertverhalten in den Definitionslücken

$x_1 = -1$ bzw. $x_2 = 1$:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 \ = \ 0 \qquad \text{stetig ergänzbar}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 \ = \ +\infty \cdot \qquad \text{Pol ohne Vorzeichenwechsel}$$

Verhalten im Unendlichen:

$\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \ = \ \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^2 \ = \ 1.$ Zur Bestimmung der Asymptoten $g(x) = ax + b$ berechnen wir wie oben

$$a \ = \ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad b = \ \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) \ = 1.$$

- Symmetrie: zunächst keine erkennbar.

- Nullstellen: keine, da $x = -1$ nicht zum Definitionsbereich von f gehört.

- Extrema und Monotonie:

  Für die erste Ableitung von f gilt:

  $$f'(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}\right) = -4\frac{x+1}{(x-1)^3}.$$

  Einzige Nullstelle: $x = -1 \notin D \Longrightarrow$ keine Extrema

  Monotonieverhalten kann sich nur bei Überschreiten der Definitionslücken in $x = \pm 1$ ändern Es gelten folgende Ungleichungen:

  $$x+1 \begin{cases} < 0 & \text{für } x < -1 \\ > 0 & \text{für } -1 < x \end{cases} \qquad \text{und} \qquad (x-1)^3 \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 1 \\ > 0 & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Damit ergibt sich

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < -1 & \Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend} \\ > 0 & \text{für } -1 < x < 1 & \Rightarrow f \text{ ist streng monoton steigend} \\ < 0 & \text{für } 1 < x & \Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend} \end{cases}$$

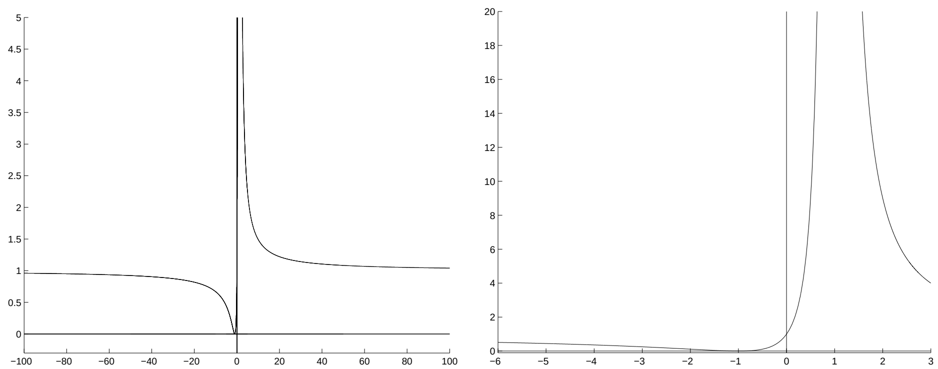
- Wendepunkte und Konvexität:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6} \\ &= -4\frac{(x-1) - 3(x+1)}{(x-1)^4} = 4\frac{(2x+4)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < -2 \quad \Rightarrow f \text{ ist streng konkav} \\ = 0 & \text{für } x = -2 \\ > 0 & \text{für } x > -2 \quad \Rightarrow f \text{ ist streng konvex} \end{cases}$$

Damit ist $x_3 = -2$ Wendepunkt (Rechts-linkskurve)

- Skizze:



- Da f im Intervall $]-1,1[$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz und

$$\lim_{x\to-1} f(x) = 0\,, \quad \wedge \quad \lim_{x\to+1} f(x) = \infty,$$

dass der Bildbereich das Intervall $]0,\infty[$ enthält. Da f nur positive Werte annehmen kann, folgt

$$W =]0,\, \infty\,[\,.$$