Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. H. P. Kiani

NEXTLEVEL im WiSe 2011/12

Vorlesung 6

Mittelwersätze, l'Hospital

Taylorreihen

Zur Erinnerung:

Satz von Rolle: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar. Dann folgt aus $f(a) = f(b)$, dass f' mindestens eine Nullstelle in [a,b] hat.

Speziell für $f(a) = f(b) = 0$:

Zwischen zwei Nullstellen der Funktion liegt mindestens eine Nullstelle der Ableitung!

Satz 6.1) Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar dann gibt es (mindestens) ein x_0 in (a,b) mit

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

BEWEIS: Satz von Rolle anwenden auf $g := f-$ Sekante:

$$g(x) := f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(x) := f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Folgerungen: f sei differenzierbar auf $I = [a, b]$, Dann gilt

- f konstant $\iff f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$
- f (streng) monoton wachsend $\iff f'(x) \geq 0\,(> 0) \quad \forall\, x \in I$
- f (streng) monoton fallend $\iff f'(x) \leq 0\,(< 0) \quad \forall\, x \in I$

Satz 6.2) Verallgemeinerte Mittelwertsatz

sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar, und $g'(x) \neq 0$ auf (a,b), so gibt es (mindestens) ein x_0 in (a,b) mit

$$\boxed{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

BEWEIS: Satz von Rolle anwenden auf:

$$F(x) := f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Regeln von (Bernoulli) de l'Hospital

Satz 6.3) f und g seien differenzierbar in $I =]a, b[$ und

$$f(x_0) = g(x_0) = 0 \quad \text{für ein } x_0 \in I, \qquad g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

BEWEIS:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad \text{für } x \to x_0$$

BEMERKUNG : analoges gilt bei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} g_(x_0) = \pm\infty$.

Beispiele: $a, b > 0$:

A) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

B) $$\lim_{x\to \infty} \frac{e^{ax}}{x} = \qquad\qquad .$$

C) $$\lim_{x\to \infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \lim_{x\to \infty} \left(\qquad \right)^b =$$

Jede Exponentialfunktion geht für $x \to \infty$ schneller gegen ∞ als jede Potenz!

D) $$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = \lim_{x\to \infty} \qquad =$$

Wegen $\ln(x) = \ln(a) \log_a(x)$ folgt

Jede Logarithmusfunktion geht für $x \to \infty$ langsamer gegen ∞ als jede Potenz!

E) $$\lim_{x\to 0} \ln(x) x^b = \lim_{x\to 0} \qquad = \frac{\ln(x)}{x^{-b}}$$

F) $$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} =$$

G) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to 0} =$$

H) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}$$

I) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right).$$

Taylorreihen/-polynome

Probleme in den Anwendungen :

oft hohe Dimension, meist nichtpolynomial

$\Longrightarrow$ meist schwer /unmöglich exakt lösbar

- FRAGE: Kann man das Problem zumindest **lokal** hinreichend gut durch ein polynomiales Model beschreiben?
- WOZU? Bei Polynomen meist einfacher : Nullstellen, Verlauf, Ableitungen, Integrale etc.
- WAS IST GUT? Im Mittel? Maximale Abweichung im vorgegebenem Bereich? Fläche zwischen Funktionsgraphen minimal? Oder $\cdots$

HIER : möglichst gut in einem Punkt x_0

GENAUER: zu f und einem festen Punkt suchen wir ein Polynom p , für das

$$f(x_0) = p(x_0)\,, \quad f'(x_0) = p'(x_0)\,, \quad f''(x_0) = p''(x_0)$$
$$\cdots\; f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$$

mit möglichst hohem n gilt.

0-ter Versuch : Polynom nullten grades : $p_0(x) = a_0 \quad a_0 = f(x_0)$

Weitere Forderungen : i.A. nicht erfüllbar!

Soll nicht nur der Funktionswert sondern auch die Steigung stimmen, braucht man noch einen Parameter

$p_1(x) := a_0 + a_1(x - x_0) \implies p_1'(x) = a_1 = f'(x_0)$

Also

$$\boxed{p_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

p_1 stimmt in x_0 mit f in Funktionwert und Steigung überein

Nächste Forderung $f''(x_0) = p''(x_0)$ i.A. mit linearen Polynomen nicht erfüllbar!

Sollen nicht nur der Funktionswert und Steigung sondern auch die zweite Ableitung stimmen, braucht man noch einen Parameter

$p_2(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$

Muss jetzt etwa $a_2 = f''(x_0)$ gelten? Probieren Sie es!

Für

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

gilt

$$p_n^{(k)}(x_0) \;=\; k!a_k$$

Soll

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

gelten, so muss gelten:

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$$

Satz 6.3) : Taylorsche Formel mit Lagrangescher Restgliedformel

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf I (n+1)-mal differenzierfunktion und $x, x_0 \in I$. Dann gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)\,.$$

Für das sogenannte **Restglied** R_n gilt

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\psi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$$

wobei die (in der Regel unbekannte) **Zwischenstelle** ψ ein Wert zwischen x und x_0 ist.

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt **Taylorpolynom** n-ten Grades zu f mit dem **Entwicklungspunkt** x_0.

BEWEIS: Für $x = x_0$ sind die Behauptungen sofort klar. Sei also $x \neq x_0$. Dann gibt es zu festem x sicher eine Konstante K mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + K(x - x_0)^{n+1}.$$

Wir halten nun x fest und definieren

$$F(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x - z)^1 + \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n + K(x - z)^{n+1}.$$

Es gilt $\quad F(x) = f(x) = F(x_0)$.

Rolle : $\quad \exists\psi$ zwischen x und x_0 mit $F'(\psi) = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}F(z) = F'(z) &= f'(z) + f'(z)(-1) + f''(z)(x-z)^1 \\
&+ \frac{f''(z)}{2!}(-2)(x-z)^1 + \frac{f^{(3)}(z)}{2!}(x-z)^2 \\
&+ \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(-n)(x-z)^{n-1} \\
&+ \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - K(n+1)(x-z)^n .
\end{aligned}
$$

Also

$$
0 = F'(\psi) = \frac{f^{(n+1)}(\psi)}{n!}(x-\psi)^n - K(n+1)(x-\psi)^n
$$

$$
\Longrightarrow \frac{f^{(n+1)}(\psi)}{n!} = K(n+1) \Longrightarrow K = \frac{f^{(n+1)}(\psi)}{(n+1)!}.
$$

BEISPIELE:

- Exponentialfunktion: $x_0 := 0$

$f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(n)}(x) = e^x$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$\begin{aligned} T_n(x;0) =& f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\ & = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ & = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Approximation : lokal gut. Fehlerabschätzung : wo??

Zum Beispiel für $x \in [-0.1,\, 0.1]$ und $n = 4$:

$$|R_n(x;0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\psi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{(0.1)^5}{5!} e^{\psi}$$

$$\leq \frac{(0.1)^5}{120} e^{0.1} \leq \frac{(0.1)^5}{120} e^{0.5} \leq \frac{(0.1)^5}{120} 4^{0.5} = \frac{10^{-5}}{60}$$

für $x \in [-1, 1]$ und $n = 4$:

$$|R_n(x;0)| \leq \frac{(1)^5}{120} e^1 \leq \frac{e}{120} \leq \frac{3}{120} = \frac{1}{40} = 0.025$$

Für festes x gilt

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x;0)| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = 0$$

Beweis ?

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad \text{oder}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

Taylorreihe von e^x um Null/mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

- <u>Sinusreihe</u>, $x_0 := 0,\ I = [-0.2,\ 0.2]$

$$\begin{array}{lclclcl}
f(x) & = & \sin(x) & \Longrightarrow & f(x_0) & = & 0 \\
f'(x) & = & \cos(x) & \Longrightarrow & f'(x_0) & = & 1 \\
f''(x) & = & -\sin(x) & \Longrightarrow & f''(x_0) & = & 0 \\
f'''(x) & = & -\cos(x) & \Longrightarrow & f'''(x_0) & = & -1 \\
f^{(4)}(x) & = & \sin(x) & \Longrightarrow & f^{(4)}(x_0) & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
f^{4k}(x) & = & \sin(x) & f^{(4k+2)}(x) & = & -\sin(x) \\
f^{4k+1}(x) & = & \cos(x) & f^{(4k+3)}(x) & = & -\cos(x) \\
f^{2k}(0) & = & 0 & f^{(2k+1)}(0) & = & (-1)^k
\end{array}$$

$$T(x;0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots$$

$$T_{2n+1}(x;0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = T_{2n+2}(x;0)$$

$$| R_{2n+1}(x;0) | = | R_{2n+2}(x;0) | = \left| \frac{f^{(2n+3)}(\alpha)}{(2n+3)!} (x-0)^{(2n+3)} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^{(2n+3)}}{(2n+3)!} \right|$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

BEISPIEL:

Polynom fünften Grades, $x_0 := 0,\ I = [-0.2,\ 0.2]$

$$T_5(x;0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$|R_5(x)| \;=\; |R_6(x)| \;=\; \left|\frac{f^{(7)}(\alpha)}{7!}\,x^7\right|$$

$$\leq\; \left|\frac{\cos(\alpha)}{7!}\,0.2^7\right| \leq\; \frac{2^7}{7!\,10^7} \;=\; \frac{1}{7!\,5^7} \;< 4\cdot 10^{-8}.$$

- Cosinusreihe, $x_0 := 0,\ I = [-0.2,\ 0.2]$

- Binomische Reihe,

Zur Erinnerung: $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$f^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)\,(1+x)^{n-k}$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

$$T_n(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Sei nun $a \in \mathbb{R}$ beliebig, also nicht unbedingt aus $\mathbb{N}$.

Wir definieren

$$\binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots (a-k+1)}{k!} \qquad k \in \mathbb{N} \qquad \binom{a}{0} = 1\,.$$

Dann erhält man völlig analog zum Fall $n \in \mathbb{N}$ für $f(x) := (1+x)^a$ zum Entwicklungspukt $x_0 = 0$ die Taylorreihe

$$T(x;0) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k\,.$$

<u>BEISPIEL</u>: Berechnen Sie $T_2(x;0)$ für $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ und $x \in [-1,1]$. Schätzen Sie den Fehler ab.