Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. H. P. Kiani

NEXTLEVEL im WiSe 2011/12

Vorlesung 5, Teil 2

Linearisierung, einige Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Die ins Netz gestellten Kopien der Vorlesungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Lineare Approximationen:

Probleme in den Anwendungen :

oft hohe Dimension, meist nichtlinear

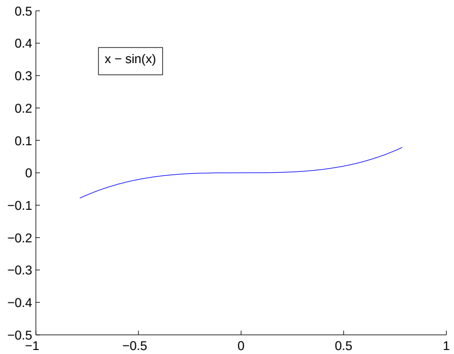
$\Longrightarrow$ meist schwer /unmöglich exakt lösbar

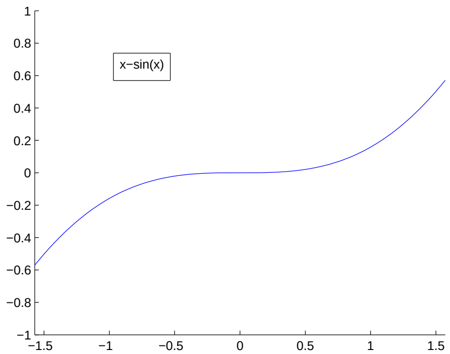
FRAGE: Kann man das Problem zumindest **lokal** hinreichend gut durch ein lineares Model beschreiben?

Wozu?

- lineare Probleme meist einfacher
- Lösungen homogener (rechte Siete $= 0$, z.B. $Ax = 0$) Probleme bilden linearen Raum $\Longrightarrow$ Basis, etc.
- Bei geeigneter Struktur: eindeutige Darstellung der Lösungen

Bereits gesehen: $\sin(x) \approx x$ für x nahe Null:





Tangente in Null:

$$t_0(x) = t(x;0) = \sin(0) + (\sin(x))'|_{x=0}\,(x-0) = x$$

Satz 5.4)

$f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar $\iff \exists a (= f'(x_0))$:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0.}$$

Im Falle der Existenz heißt a die Ableitung von f in x_0.

BEWEIS: folgt unmittelbar aus der Definition!

$f(x_0) + a(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = t(x)$

ist eine lineare Funktion

Wähle $t(x)$ als Approximatin von $f(x)$

Absoluter Fehler: $A(x) = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|$

f diffbar. $\Longrightarrow$ $A(x)$ geht schneller gegen Null als $|x - x_0|$

Schreibweise: $A(x) = o(|x - x_0|$.

Später zeigen wir für zwei mal stetig diffbare Funktionen auf abgeschlossenen, beschränkten Intervallen

$$A(x) \leq K \cdot |x - x_0|^2$$

Anwendung: Newtonverfahren

Zu bestimmen: Nullstelle von $f(x)$ nahe x_0

Vorgehen: Bestimme als Näherung Nullstelle der Tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = t(x) = 0!$$

$$\iff f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0) \qquad \text{sofern } f(x_0) \neq 0 \text{ folgt}$$

$$\iff (x - x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \iff x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Falls $|f(x)|$ klein genug : fertig, sonst: wiederhole Verfahren mit x statt x_0.

Insgesamt erhält man die Rekursion/Iterationsvorschrift:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Satz 5.5) Notwendige Bedingung für Extrema:

Sei I ein (reelles) Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I \setminus \delta I$ diffbar. f nehme in x_0 einen globalen Extremwert (Max/Min) an. Dann gilt

$$\boxed{f'(x_0) = 0.}$$

BEWEIS: o.B.d.A. : Maximum (andernfalls betracht -f)

Nach Annahme gilt $f(x_0) \geq f(x) \iff f(x) - f(x_0) \leq 0 \forall x \in I$

$$\Longrightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{und}$$

$$\Longrightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{und}$$

__Satz von Rolle:__ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar. Dann folgt aus $f(a) = f(b)$, dass f' mindestens eine Nullstelle in [a,b] hat.

BEWEIS:

f nimmt auf dem abgeschlossenen, beschränkten Intervall Minimum m und Maximum M an.

Fall 1) $m = M \Longrightarrow f$ konstant $\Longrightarrow f' \equiv 0$

Fall 2) $m < M$: da $f(a) = f(b)$ liegt m oder/und M in (a,b)

Behauptung folgt aus Satz 5.5.

Speziell für $f(a) = f(b) = 0$:

Zwischen zwei Nullstellen der Funktion liegt mindestens eine Nullstelle der Ableitung!

Umgekehrt : hat f' keine Nullstelle in (a,b), so hat f höchstens eine Nullstelle in [a,b].

Rolle rückwärts :)

Hat f' höchstens n Nullstellen in (a,b), so hat f höchstens $n+1$ Nullstellen in [a,b].

Hat $f^{(n)}$ keine Nullstelle in (a,b), so hat

$f^{(n-1)}$ höchstens eine, $f^{(n-2)}$ höchstens zwei,

$f^{(n-3)}$ höchstens drei, $\cdots$

f höchstens n Nullstellen in [a,b].

Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar dann gibt es (mindestens) ein x_0 in (a,b) mit

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

BEWEIS:

Satz von Rolle anwenden auf

$$g(x) := f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Zwei typische Aufgaben:

- Berechnen Sie alle reellen Nullstellen von $f(x) = e^{x^2} + 3x^4 - 2$ approximativ mit einer absoluten Genauigkeit von 0.05.

  Hinweis : Natürlich dürfen Sie hier einen Taschenrechner oder einen Computer benutzen. Eine numerische Berechnung oder ein Plot genügen aber nicht. Sie müssen nachweisen, dass Sie **alle** Nullstellen näherungsweise berechnet haben.

- bekannt sei: f ist zweimal stetig differenzierbar auf [-1,1] (Schreibweise $f \in C^2[-1,1]$) mit $|f''| \leq 1$.

  Ludger Luschig will in einem Versuch die folgenden Werte gemessen haben:

  $$f(-1) = 1, \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1\,.$$

Weisen sie ihm nach, dass er geschlampt hat.

Lösungshinweise)

a) Zunächst stellt man fest, dass f eine gerade Funktion ist und rechnet die ersten Ableitungen aus:

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + 12x^3 \qquad f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2} + 36x^2\,.$$

Da die zweite Ableitung keine reellen Nullstellen hat, kann f nach dem Satz von Rolle höchstens zwei reelle Nullstellen haben.

Nun gilt

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{und} \quad f(1) = e^1 + 3 - 2 > 0$$

also gibt es nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ und aus Symmetriegründen dann auch mindestens eine im Intervall [-1,0]. Insgesamt hat f also genau zwei Nullstellen.

Startet man das Newtonverfahren $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit dem Startwert $x_0 = 0.5$, so erhält man

$$x_1 = 0.6898\cdots, \quad x_2 = 0.6429\cdots, \quad x_3 = 0.6381\cdots$$

Wegen $f(0.6) = -0.1778 < 0$ und $f(0.7) = 0.3526 > 0$ genügen $x^* = -0.65$ und $x^{**} = 0.65$ als Näherungen für die beiden Nullstellen.

b) MWS: $\exists x_1 \in [-1, 0) \land x_2 \in (0, 1] : f'(x_1) = -1, f'(x_2) = 1$

MWS: $\exists x_3 \in (x_1, x_2) : f''(x_3) = \dfrac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1}$

$\Longrightarrow f''(x_3) = \dfrac{2}{x_2 - x_1} > 2$ WIDERSPRUCH!

Satz 6.2) Verallgemeinerte Mittelwertsatz

sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren des Intervalls differenzierbar, und $g'(x) \neq 0$ auf (a,b), so gibt es (mindestens) ein x_0 in (a,b) mit

$$\boxed{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

BEWEIS: Satz von Rolle anwenden auf:

$$F(x) := f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Regeln von (Bernoulli) de l'Hospital

Satz 6.3) f und g seien differenzierbar in I und

$$f(x_0) = g_(x_0) = 0\,, \quad g'(x_0) \neq 0 \qquad \text{für ein } x_0 \in I$$

Sei wieter $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$, $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

BEWEIS:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad \text{für } x \to x_0$$

BEMERKUNG : analoges gilt bei $\lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} g_(x_0) = \pm\infty$.

Beispiele: $a, b > 0$:

A) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

B) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{ax}}{x} = \qquad .$$

C) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \lim_{x \to \infty} (\qquad)^b =$$

Jede Exponentialfunktion geht für $x \to \infty$ schneller gegen ∞ als jede Potenz!

D) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = \lim_{x \to \infty} =$$

Wegen $\ln(x) = \ln(a) \log_a(x)$ folgt

Jede Logarithmusfunktion geht für $x \to \infty$ langsamer gegen ∞ als jede Potenz!

E) $$\lim_{x \to 0} \ln(x) x^b = \lim_{x \to 0} = \frac{\ln(x)}{x^{-b}}$$

F) $$\lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} =$$

G) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x \to 0} =$$

H) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{\sin^2(x)} = \lim_{x \to 0}$$

I) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$