

NEXTLEVEL im WiSe 2011/12

Vorlesung 5

Differentialrechnung

Die ins Netz gestellten Kopien der Vorlesungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Differentialrechnung:

Motivation: eindimensionale Bewegung,

t : Zeit, $y = f(t)$: zurückgelegte Strecke

Zurückgelegte Strecke in der Zeitspanne $[t_0, t_1]$:

$$\Delta y = f(t_1) - f(t_0)$$

Durchschnittsgeschwindigkeit in der Zeitspanne $[t_0, t_1]$

$$v_d = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Für $t_1 \rightarrow t_0$: Durchschnittsgeschwindigkeit

→ Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$

$$v(t_0) := \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} =: f'(t_0)$$

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \quad \text{Differenzenquotient}$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \quad \text{Differentialquotient}$$

Ableitung von f in t_0

Beispiel : Ein Camembert wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ von der Spitze des Eiffelturms (ca. 370 m) fallen gelassen. Nach t Sekunden hat er unter Vernachlässigung von Reibungseffekten

$$y(t) = \frac{gt^2}{2}, \quad g \approx 10 \quad \text{der Einfachheit halber!!}$$

Meter zurückgelegt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt des freien Falls als Grenzwert des Differenzenquotienten.

Geometrische Interpretation Schule: $y = f(x)$

Differenzenquotient: Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))^T$ und $(x_1, f(x_1))^T$

Differentialquotient: Steigung der Tangente

Aber was ist eigentlich die Tangente???

Definition $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in I^0$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Im Falle der Existenz heißt der Grenzwert **Ableitung/Differentialquotient** von f in x_0 .

Schreibweise: $f'(x_0), \frac{d}{dx} f(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$

Einseitige Differenzierbarkeit : analog einseitiger Stetigkeit

Tangente von f in x_0 oder

Linearisierung von f in x_0 (mit Entwicklungspkt x_0):

$$t(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt aus I differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf I . Randpunkte : einseitige Grenzwerte der Differenzenquotienten

Ableitungsfunktion: $f' : I \rightarrow \mathbb{R}, f' : x \mapsto f'(x)$

Ist f' stetig in x_0 (in I), so heißt f stetig differenzierbar in x_0 (auf I).

Beispiel: Zeigen Sie :

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \implies f'(x) = nx^{n-1}$$

Satz 5.1)

$I :=$ Intervall oder Vereinigung von Intervallen. Dann ist jede auf I differenzierbare Funktion dort stetig.

Beweis: ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.

Beispiel: Für welchen Werte von a und b ist die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & t < 1 \\ a + bt & t \geq 1 \end{cases}$$

stetig differenzierbar?

Einige Rechenregeln:

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ diff.bar in $x_0 \in I$

$\implies f + g, \alpha f (\alpha \in \mathbb{R}), f \cdot g,$

f/g (falls $g(x_0) \neq 0$) diffbar in x_0 .

Homogenität:	$(\alpha f)'(x_0)$	$=$	$\alpha f'(x_0)$
Summenregel:	$(f + g)'(x_0)$	$=$	$f'(x_0) + g'(x_0)$
Produktregel:	$(f \cdot g)'(x_0)$	$=$	$f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0)$
Quotientenregel:	$(\frac{f}{g})'(x_0)$	$=$	$\frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Beweis: exemplarisch für die Produktregel

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(x_0) \cdot f(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0) \end{aligned}$$

Bemerkung: mit x^n ist also jedes Polynom und jede rationale Funktion in ihrem Definitionsbereich diff.bar!

Kettenregel/Umkehrfunktion

Sei $f : D_f \rightarrow B_f \subset D_g$ in x_0 differenzierbar und

$g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar

Dann ist $g(f) : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g(f) : x \mapsto g(f(x))$ in x_0 diff.bar und

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Spezialfall:

$$f^{-1}(f(x)) = x \implies (f^{-1}(f(x)))' = (x)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1$$

$$\implies (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\implies (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y := f(x)$$

$$\implies (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

BEISPIEL: Oben berechnet

$$f(x) = x^n, \implies f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned} \implies \left(\sqrt[n]{x}\right)' &= \frac{1}{n \cdot (f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n \cdot (x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n} x^{\frac{-n+1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Kettenregel: $(x^q)' = q \cdot x^{q-1} \quad \forall q \in \mathbb{Q}$

Beispiel 1: $x^{5/2} = f(g(x))$, $g(x) = \sqrt{x}$, $f(y) = y^5$.

Elementare Funktionen:

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x), \quad (e^x)' = e^x$$

Beweis: Sinus/Cosinus : geometrisch, oder Additionstheoreme.

Beispiel 2: $\tilde{f}(x) = \sin(x^2)$, $\tilde{g}(x) = \sin^2(x)$.

Exponentialfunktion : zum Beispiel über die Reihe

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Daraus ergibt sich

$$(\ln(x))' = \frac{1}{(e^{\ln x})} = \frac{1}{x}$$

Beispiele

$$(\cos(x^3 + 1))'$$

$$(\exp(\cos(x^2 + 1)))'$$

$$(x^x)' = ((e^{\ln x})^x) = \dots$$

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' =$$

$$(\arctan(x))' =$$

Höhere Ableitungen:

Eingangsbeispiel:

Zurückgelegte Strecke: $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

Geschwindigkeit: $y'(t) = \frac{1}{2}g(t^2)' = \frac{1}{2}g \cdot 2t = gt =: v(t)$.

Beschleunigung :

$v'(t) = (gt)' = g =: a(t)$ (Erdbeschleunigung)

$a(t) = v'(t) = (y'(t))' =: y''(t)$ zweite Ableitung von y

analog : k mal (stetig) differenzierbar in x_0 bzw. auf I

$$y''' =: y^{(3)}(t), y^{(4)}(t), \dots, y^{(n)}(t)$$

Begriff der C^k Funktionen auf $[a,b]$, $C^k([a,b])$.

BEISPIELE:

- $f(x) = x^6, f'(x) = 6x^5,$
- $f''(x) = 6 \cdot 5x^4, f'''(x) = 6 \cdot 5 \cdot 4x^3$
- $\cos''(x) =$
- $\sin''(x) =$

- Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x}{e^{2x}}$.

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k -te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}_0$ durch

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k 2^{k-1} (2x - k)}{e^{2x}}$$

gegeben ist.

Definition: Ist f auf D n –mal differenzierbar und ist die n –te Ableitung stetig, so heißt f n –mal stetig differenzierbar oder C^n –Funktion.

$C^0[a, b]$: stetig auf $[a, b]$

$C^\infty[a, b]$: beliebig oft stetig diff.bar auf $[a, b]$