Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

NEXTLEVEL im WiSe 2011/12

Vorlesung 4

Funktionen, Stetigkeit

4.1) Topologische Grundbegriffe

Gegeben sei ein normierter Raum V (z.B. $\mathbb{R}^n$).
Im $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ sei $\boldsymbol{x} := (x_1, \cdots, x_n)^T$. Dann gibt

$$\| \boldsymbol{x} \| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

den (aus dem Alltag gewohnten) Abstand des Punktes $\boldsymbol{x}$ zum Nullpunkt wieder.

Verallgemeinerung : auch im $\mathbb{R}^n$ nennt man
$\|\boldsymbol{x}\|$: die (Zwei-)Norm von $\boldsymbol{x}$ und
$\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|$: den Abstand zweier Punkte $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

Normen und Abstände können in viel allgemeineren Räume definiert werden (siehe L.A.)

Definition 4.1: Sei $x_0 \in V$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann heißt

$$K_\epsilon(x_0) := \{ x \in V : \|x - x_0\| < \epsilon \}$$

offene Kugel mit Radius ϵ um x_0 oder $\epsilon-$**Umgebung** von x_0.

Definition 4.2: $x_0 \in D \subset V$ heißt **innerer Punkt** von D, genau dann wenn D eine Umgebung von x_0 enthält, d.h.:

$$\exists\, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \,:\, K_\epsilon\,(x_0) \,\subset\, D\,.$$

Die Menge aller inneren Punkte von D heißt das **Innere von D** oder der **offene Kern von D**.

$$D^\circ \,:=\, \left\{x \in D \,:\, \exists\, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \,:\, K_\epsilon\,(x) \,\subset\, D\right\}$$

Die Menge D heißt **offen**, wenn sie nur innere Punkte enthält, d.h. $D = D^\circ$.

Die Menge D heißt **beschränkt**, wenn es ein $r \in \mathbb{R}^+$ und ein $x_0 \in D$ gibt, sodass $D \,\subset\, K_r\,(x_0)$ gilt.

Definition 4.3: $x \in V$ heißt **Häufungspunkt** einer Teilmenge $D \subset V$, wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Punkte aus D liegen.

$D' := \{x \in V : x$ ist Häufungspunkt von $D\}$,

$\bar{D} := D \cup D' =$ abgeschlossene Hülle von D.

Beispiel 1: $V := \mathbb{R}\,,\ D :=]0,1] \implies D' = \bar{D} = [0,1]$.

Beispiel 2:

$(V, \|\,.\,\|) \ := \ (\mathbb{R}, \ |\,.\,|)\,, \quad D := \{0\} \cup]1,2] \Longrightarrow D^\circ \ =]1,2[$,

$D' = \ [1,2], \quad \bar{D} = \{0\} \ \cup \ [1,2] \qquad D \ \subset \ K_3(2) \Longrightarrow D$ ist beschränkt.

4.2) Stetige Funktionen

Definition 4.4 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein innerer Punkt von $D \subset V$.

Man sagt $f(x)$ **konvergiert** für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert $y_0 \in \mathbb{R}$, genau dann wenn

$$\forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{mit}\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) =: \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0\,.$$

links– bzw. rechtsseitige Grenzwerte

$$\forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{mit}\ x_n < x_0,\ \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) =: \lim_{x\to x_0-} f(x) = y_0\,.$$

bzw.

$$\forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{mit}\ x_n > x_0,\ \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) =: \lim_{x\to x_0+} f(x) = y_0\,.$$

Definition 4.5 : Stetigkeit
Sei $D \subset V$. Dann heißt $f : D \to \mathbb{R}$

- **stetig in** $x_0 \in D \cap D' \iff (x_0 \in D \cap D') \wedge (\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

- **stetig ergänzbar in** $x_0 \in D' \iff (x_0 \in D') \wedge (\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ existiert,

- **stetig,** genau dann, wenn f in allen Punkten aus $D \cap D'$ stetig ist.

Satz 4.1: $\epsilon - \delta -$ Definition der Stetigkeit

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \in D \cap D' \iff$$
$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$$
$$x \in D \wedge \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon .$$

Beweis:
$'' \implies ''$ Annahme : f ist stetig und es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit

$$\|x - x_0\| < \delta \wedge \|f(x) - f(x_0)\| \geq \epsilon$$

existiert. Wir wählen speziell $\delta_n := \frac{1}{n}$ und x_n, so dass

$$\|x_n - x_0\| < \delta_n := \frac{1}{n}$$

gilt. Dann folgt im Widerspruch zur Stetigkeitsannahme

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0) .$$

$'' \Longleftarrow ''$ Annahme : $\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$
$x \in D \wedge \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \delta \qquad \forall n \geq N(\epsilon)$$

Nach Annahme gilt dann

$$\|f(x_n) - f(x_0)\| < \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon) .$$

Beispiele :

a) Treppenfunktionen, z. B. Heavyside-Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$ nur rechtsseitig stetig,

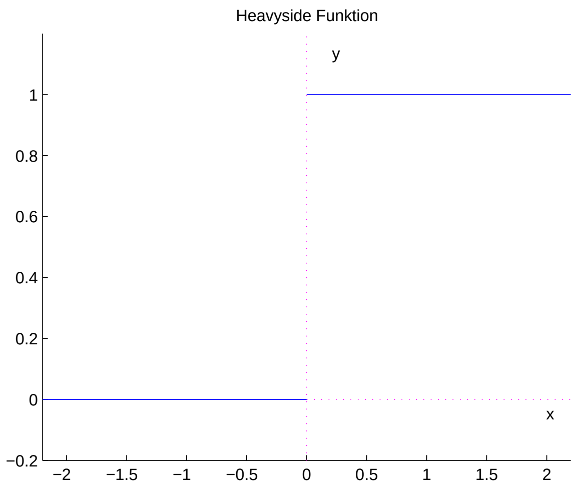

Abbildung 1: Sprungstelle

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,, \quad D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht stetig ergänzbar in $x_0 = 0$,

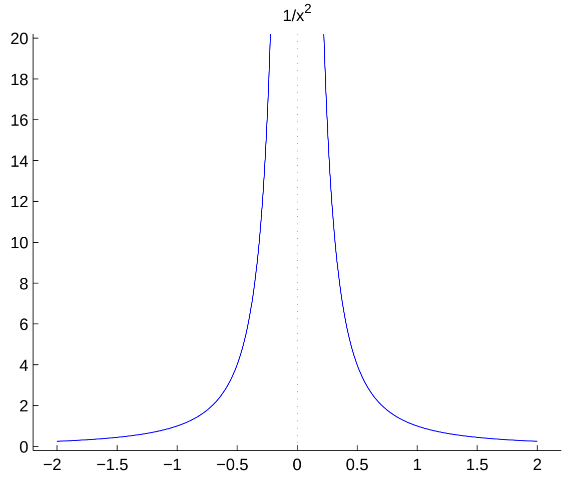

Abbildung 2: Pol

c) $x^n,\ \sin(x),\ \cos(x),\ \exp(x),\ \ln(x),\ \sqrt[m]{x}$ sind in ihren Definitionsbereichen stetig.

d) sind f, g stetig, $c \in \mathbb{R}$ und die Definitionsbereiche geeignet, so sind auch

$f + g,\ c \cdot f, f \cdot g,\ f/g\ (g \neq 0), f(g)$

stetig. (Beweis : einfaches Rechnen mit Folgen oder der $\epsilon - \delta$ Definition).

e) Oszillation $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$c(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

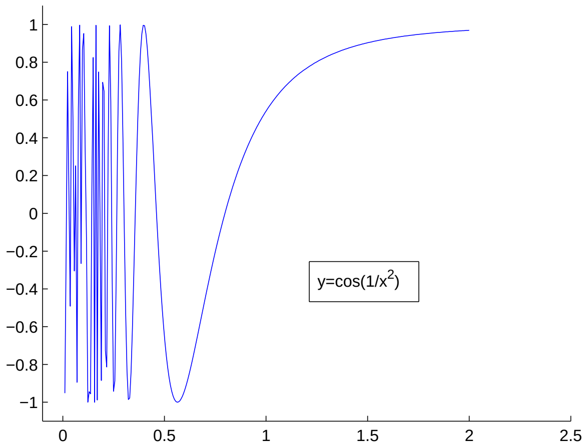

Abbildung 3: Oszillation

Satz 4.2 : Nullenstellensatz

$$\Big[f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad (\forall x \in [a,b]) \text{ stetig und } f(a)\cdot f(b) < 0 \Big]$$

$\Longrightarrow$ f hat mindestens eine Nullstelle in $[a,b]$.

Beweis: Intervallhalbierung

- Anfangswerte : $n := 0 \qquad a_0 := a \qquad b_0 = b$

- Iteration : solange $|a_n - b_n| > 0$

  $m := (a_n + b_n)/2$

  falls $f(m) \cdot f(a_n) < 0 : a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := m$

  falls $f(m) \cdot f(b_n) < 0 : b_{n+1} := b_n, a_{n+1} := m$

  falls $f(m) = 0$: Ausgabe von Nullstelle m , STOP.

$n := n + 1$

ACHTUNG : Beim echten Programmieren wird man

– Notbremsen einbauen (welche?)

– nur nach $|f(m)| < Toleranz$ fragen.

– absoluter Fehler nach N Schritten $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot |b - a|$

– relativer Fehler $:= \dfrac{|\text{abs. Fehler}|}{|\text{exakte Lsg.}|} \leq \dfrac{|\text{abs. Fehler}|}{\min\{|x|, x \in [a_n, b_n]\}}$

Zwischenwertsatz :

$\Big[f : [a,b] \to \mathbb{R},$ stetig und $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b) \Big]$

$\Longrightarrow$ Es gibt mindestens ein $\hat{x} \in [a,b] : f(\hat{x}) = c$.

Beispiel:

$f(x) := x^4 - 4x^2 + 3\cos(x)$ hat mindestens vier Nullstellen im Intervall $[-4,4]$.

Beweis : Symmetrie + Zwischenwertsatz

$f(0) = 3\cos(0) = 3$
$f(1) = -3 + 3\cos(x) < 0$
$f(4) = 4^3(4-1) + 3\cos(4) > 0$

Es gibt jeweils mindestens eine Nullstelle in $[-4,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,4]$.

Extrema (Minima, Maxima)

Oft gesucht : maximale bzw. minimale Werte einer abhängigen Variablen (z.B. $p(T)$) für bestimmte Bereiche der unabhängigen Variablen (z.B. $T \in [a, b]$).

FRAGE: Gibt es die überhaupt? Lohnt es sich zu suchen?

Zur Erinnerung: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$

$$f \text{ nach oben } \textbf{beschränkt}$$
$$\iff \exists\, C \in \mathbb{R} : f(x) \leq C \quad \forall x \in D$$
$$C \text{ ist eine } \textbf{obere Schranke} \text{ von } f$$

Supremum von f:

$s := \sup_{x \in D} f(x) :=$ kleinste obere Schranke von f

Gibt es ein $\hat{x} \in D$ mit $f(\hat{x}) = s$

also $f(x) \leq f(\hat{x}) \quad \forall x \in D$

so heißt $f(\hat{x})$ **Maximum** von f.

Analog: **untere Schranke, Infimum** von $f = \inf_{x \in D} f(x)$, **Minimum** von f.

f beschränkt : f nach oben und unten beschränkt.

Beispiel: $D_1 = [0,1]$, $D_2 = (0,1]$, $D_3 = [0,1)$,
$f(x) = x^2$.

Satz 4.3) Jede stetige Funktion f auf einem abgeschlossene und beschränkten (kompakten) Intervall $I := [a, b]$ ist beschränkt.

Beweis: Annahme f ist nicht nach oben beschränkt

$\implies \forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in I$ mit $f(x_n) > n$.

Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\implies \exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \to \bar{x} \in I$

mit $\lim\limits_{n_k \to \infty} f((x_{n_k}) = \infty$

f stetig $\implies \lim\limits_{n_k \to \infty} f((x_{n_k}) = f(\bar{x})$ WIDERSRUCH!!!

Beschränktheit nach unten analog.

Satz 4.4) Jede stetige Funktion f auf einem abgeschlossenen und beschränkten (kompakten) Intervall $I := [a, b]$ nimmt auf I Minimum und Maximum an.

Beweis: (Für Maximum, Minimum: analog)

Nach Satz 4.2 existiert $s := \sup_{x \in I} f(x)$.

$$\Longrightarrow \forall n \in N \quad \exists x_n : \; s - \frac{1}{n} < f(x_n) < s$$

Andernfalls : s kein Supremum!!!

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = s \qquad (*).$$

$$\text{Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt } \Longrightarrow \exists \text{ konvergente}$$

$$\text{Teilfolge } (x_{n_k}) \to \bar{x} \in I \qquad \text{(Abgschlossenheit)},$$

$$f \text{ stetig } \Longrightarrow \lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

$$\text{wegen (*) gilt } \lim_{n_k\to\infty} f((x_{n_k}) = s$$

$$\text{Also } f(\bar{x}) = s \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

D.h. wenn f stetig und das Intervall beschränkt ist, gibt es immer ein globales Maximum und ein globales Minimum. Näheres zu den Extrema liefert die Differentialrechnung.

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt gleichmäßig stetig , falls gilt

$\forall \epsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, x, x_0 \in D$
$\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon\,.$

Veranschaulichung vor Ort.

Ohne Beweis: Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig.

Beispiele : Untersuche $f(x) := x^2$ bzw. $f(x) := \sqrt{x}$ auf gleichmäßige Stetigkeit.