Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

NEXTLEVEL im WiSe 2011/12

Vorlesung 4

Reelle Zahlenfolgen

3.1: Reelle Zahlenfolgen

Definition: Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto f(n) =: a_n$

wird **reelle Zahlenfolge** genannt. Schreib–/Sprechweise : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a_n heißt das n-te Glied der Folge.

Beispiele:

$a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ $\qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$

Beide Folgen sind **Nullfolgen**, d.h. für zunehmendes n liegen die a_n immer dichter bei Null. Man sagt: a_n konvergiert (geht) gegen Null. Genauer:

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq N(\epsilon)$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a \quad (n \to \infty)$

Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**.

ACHTUNG: $\pm\infty$ sind keine Zahlen aus $\mathbb{R}$. Existiert für jedes (bel. große) $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\qquad a_n > C \quad \forall\, n \geq N$

so schreibt man : $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

und spricht von **Divergenz oder uneigentliche Konvergenz** der Folge gegen ∞.

Analog $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Beispiel : $a_n = \frac{1}{n}$, $a = 0$. Für beliebig **kleines** $\epsilon > 0$ rechnet man:

$|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$

Wählt man $N := \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\epsilon}$ so folgt $\forall\, n \geq N$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$$

$\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$:= Ganzzahliger Anteil von $\frac{1}{\epsilon}$.

Intervallhalbierungsverfahren, Newton–Verfahren: vor Ort.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Zahl $C_a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass: $\quad |\, a_n \,| \, \leq \, C_a \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definition:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton steigend (fallend)**, wenn

$a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Wähle ein festes $\epsilon > 0$. Dann existieren $N \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < \epsilon \, \forall n \geq N$. Also

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq \epsilon + |a| \qquad \forall\, n \geq N$$

$$\Longrightarrow\ |a_n| \leq \max\{|a_1|,\, |a_2|,\, \cdots\, |a_{N-1}|,\, |a| + \epsilon\} =: C_a\,. \qquad \square$$

Satz: Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit den Grenzwerten a bzw. b, so gilt:

a) **Linearität** :

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \qquad b_n \neq 0$$

c) Seien $a_n \geq 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{a}$$

Beweis: exemplarisch für zwei Aussagen.

1) Summen: für beliebiges $\epsilon > 0$ gibt es N_1 und N_2 mit:

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n > N_1\,, \qquad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n > N_2$$

Wähle $N := max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt $\forall\, n > N$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2) Produkte : $C_a, a, b, N(\epsilon)$ wie oben

$$\begin{aligned}
|(a_n b_n) - (ab)| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\
&\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \leq C_a \cdot \epsilon + \epsilon \cdot |b| \\
&= (C_a + |b|)\epsilon \quad \epsilon > 0 \text{ beliebig, und } n \geq N(\epsilon)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Es gelte $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots, \quad n_k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (s. Bsp. B,D)

Grenzwerte von Teilfolgen heißen **Häufungspunkte** der ursprünglichen Folge.

Beispiel A) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ folgt aus dem Satz

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} \infty & \text{falls } k > 0 \\ 1 & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0 \cdot \end{cases}$$

Beispiel B) Die geometrische Folge $a_n = q^n$ konvergiert nur für $-1 < q \leq 1$.

$$\lim_{n\to\infty} (q^n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \cdot \end{cases}$$

Beweis:

<u>Für $q = 1$</u> gilt $a_n = 1$. <u>Für $q = 0$</u> gilt $a_n = 0$.

Für $|q| < 1\,,\ q \neq 0$ ist

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{1}{q}\right| > 1 \Longleftrightarrow \exists\, h > 0 : \left|\frac{1}{q}\right| = 1 + h$$

$$\Longrightarrow |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \qquad \text{(Bernoulische Ungl.)}$$

$$\Longrightarrow |q^n| \leq \frac{1}{nh}$$

Nach Beispiel A) ist $\quad b_n := \dfrac{1}{nh} \quad$ eine **Nullfolge** ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$).

Wir haben also

$0 \leq |q|^n \leq b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Also auch : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \forall\, q \in]-1, 1[$.

Für $q = -1$

erhält man die divergente Folge $-1, +1, -1, +1, \cdots$. Es gibt zwei sogenannte **Teilfolgen**, die gegen unterschiedliche Werte konvergieren. Die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen heißen **Häufungspunkte** der ursprünglichen Folge. Hier:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$$

1 und -1 sind Häufungspunkte der Folge $(-1)^n$.

Für $|q| > 1$

$$\exists\, h > 0 : |q| = 1 + h$$

$$\Longrightarrow |q^n| = (1+h)^n > 1 + nh \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

****

Beispiel C) Problem : $''\infty - \infty''$. Gelegentlich hilfreich : dritte binomische Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$a_n := \sqrt{4n^2+6n+8} - 2n$$

$$= \frac{(\sqrt{4n^2+6n+8} - 2n)(\sqrt{4n^2+6n+8} + 2n)}{\sqrt{4n^2+6n+8} + 2n}$$

$$= \frac{4n^2+6n+8-4n^2}{\sqrt{4n^2+6n+8} + 2n} = \frac{6n+8}{\sqrt{4n^2+6n+8} + 2n}$$

$$= \frac{6+\frac{8}{n}}{\sqrt{\frac{4n^2+6n+8}{n^2}} + 2} = \frac{6+\frac{8}{n}}{\sqrt{4+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2}} + 2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{6+0}{\sqrt{4+0+0}+2} = 3/2$$

Beispiel D) $a_n = \cos(n\pi)(\frac{n-1}{2n+1}) = ?$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad$ Häufungspunkte?

Beispiel E) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{p}{n}\right)^n = e^p = \exp(p)\,.$

(Beweis: später)

Beispiel: weiter unten

Definition : Cauchy–Folge

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy–Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index N_ϵ gibt, so dass

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \, , \, n, m \, > \, N_\epsilon \, : \, |a_n \, - \, a_m| \, < \, \epsilon \, .$$

SATZ: Cauchysches Konvergenzkriterium

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy–Folge ist.

Beweis:

$\Longrightarrow$ Ist die Folge konvergent mit dem Grenzwert a, so gibt es zu $\hat{\epsilon} := \epsilon/2$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_k \, - \, a| \, < \, \hat{\epsilon} \quad \forall\, k \geq N$$

Damit gilt für alle $n,\, m \in \mathbb{N}$, $n, m > N$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \hat{\epsilon} + \hat{\epsilon} = \epsilon\,.$$

$\Longrightarrow$ Der Beweis der Umkehrung ist etwas aufwendiger. Hier nur eine Skizze

- Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge (**Satz von Bolzano/Weierstraß**, hier ohne Beweis).
- Jede Cauchy–Folge ist beschränkt.
- Es gibt einen Häufungspunkt der Folge und dieser ist zugleich der eindeutige Grenzwert. $\square$.

Rekursiv definierte Folgen $\quad a_{n+1} = R(n, a_n)$

a_{n+1} wird nicht allein durch n bestimmt, sondern hängt vom Vorgänger (gelegentlich auch von mehreren Vorgängern ab).

Beispiel: Newtonverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \text{ vorgegeben.}$$

Nächstes Ziel :

> *Satz: Jede monoton steigende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert. Es gilt*
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$$

Zur Erinnerung: Folge beschränkt $\Longleftrightarrow$
$\exists\, c, C \in \mathbb{R} : c \leq a_n \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$c =$ untere Schranke, $\qquad C =$ obere Schranke.

Definition: Die größtmögliche untere Schranke für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Infimum** der Folge. Die kleinstmögliche obere Schranke **Supremum**.

Beweis des Satzes: Jede nach oben beschränkte Folge besitzt ein Supremum

$$s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N = N(\epsilon)$ mit

$$s - \epsilon < a_N \leq s$$

Andernfalls : s kein Supremum!!!

Da die Folge monoton steigt, gilt dann

$$s - \epsilon < a_n \leq s, \quad \forall\ n \geq N$$

Also für beliebiges $\epsilon > 0: \ |s - a_n| < \epsilon \qquad \forall\ n > N(\epsilon)$.

Beispiel : Exponentialfunktion $b_0 := 1,$

$$b_{n+1} := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} = b_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

Die Folge ist offensichtlich monoton steigend, denn

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Ist sie auch beschränkt?
Idee : in den Fakultäten stehen fast nur Zahlen > 2

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-1)n} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Longrightarrow 0 < b_n < 1 + \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.$$

Dabei wurde die folgende Formel benutzt

(Zum Beweis : erweitere mit $(1-q)$).

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \qquad \forall\, q \neq 1.$$

Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2.7182818\cdots = e \;=\; \text{Eulersche Zahl!}$$

Andere Darstellung: $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Beweisidee:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n(2n)(3n)\cdots(kn)}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k+1}{n})}{1(2)(3)\cdots(k)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k+1}{n})}{1(2)(3)\cdots(k)} = \frac{1}{k!} \quad \forall\, k \geq 1\,.$$

Allgemein gilt: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p \qquad \forall\, p \in \mathbb{R}.$

Wo kommt so was vor? z.B. bei Zinsrechnug

Übung: $\displaystyle a_n := \left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \;=?$

Eine gelegentlich erfolgreiche Strategie bei rekursiven Folgen:

- Bestimme Kandidaten für Grenzwerte

- Weise Beschränktheit und Monotonie (z.B. per vollständiger Induktion) nach.

Beispiel : aus Klausur 2001, TUHH, von Oberle, Rothe, Hass

$$x_0 = 1/10 \qquad x_{n+1} = 2x_n - 7x_n^2$$

- Falls die Folge gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$ aber auch:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2x_n - 7x_n^2)$$
$$= 2\lim_{n\to\infty} x_n - 7\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 = 2x - 7x^2$$

Der Grenzwert erfüllt also:

$$x = 2x - 7x^2 \iff x - 7x^2 = 0 \iff x = 0 \vee x = \tfrac{1}{7} \qquad (*)$$

Merkregel bei rekursiven Folge: Setze (noch unbekannten) Grenzwert (hier x) auf beiden Seiten der Rekursionsformel ein. Also

$$\boxed{x_{n+1} := f(x_n) \to x \implies f(x) = x\,.}$$

- Monotonie + Beschränktheit :

  Teste ob die Werte monoton steigen oder fallen

  natürlich muss i. A. weder das Eine noch das Andere der Fall sein.

Im Beispiel gilt:

$$x_{n+1} - x_n = x_n - 7x_n^2 = x_n(1 - 7x_n)$$

Für $n = 0$ ist der letzte Ausdruck positiv, also

$$x_1 > x_0.$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - 7x_n) \geq 0 \iff x_n \in [0, \tfrac{1}{7}]\,. \quad (**)$$

Wir zeigen nun induktiv :

$$x_n \in [0, \tfrac{1}{7}] \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,. \qquad (***)$$

Anfang : $n = 0$: $x_0 = \frac{1}{10} \in [0, \frac{1}{7}]$.

Annahme: (***) gelte für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}_0$

Schritt: Dann ist $x_{n+1} = x_n(2 - 7x_n) \geq x_n \geq 0$ und

$$\frac{1}{7} - x_{n+1} = 7\left(\tfrac{1}{49} - \tfrac{2}{7}x_n + x_n^2\right) = 7 \cdot \left(\tfrac{1}{7} - x_n\right)^2 \geq 0. \qquad \square$$

Damit haben wir gleich drei Eigenschaften der Folge gezeigt:

Die Folge ist nach oben begrenzt durch 1/7.

Die Folge ist nach unten begrenzt durch Null.

Die Folge ist monoton steigend (vgl. (**)).

Wegen der ersten und dritten Eigenschaft ist die Folge konvergent.

Da als Grenzwerte nur $x = 0$ bzw. $x = 1/7$ in Frage kamen (vgl. (*)) und die Folge beginnend mit $x_0 = 1/10$ monoton steigend seien soll, kann der Grenzwert nur noch $x = 1/7$ sein.

Beispiele aus der Anleitung: Untersuchung auf Konvergenz und ggf. Grenzwert

$$a_n := \frac{1}{n^2+2}\left(\frac{n^3-3n^2+3}{n} - \frac{n^2}{2}\right), \qquad c_n := \sin\left(\tfrac{3n-2}{4n+1}\,\pi\right),$$

$$b_n := \sqrt{n^2+1} - n - 1 \text{(Klausur Feb. 2000, Aufg. 1a)} \qquad d_n = (-1)^n \left(1 - \left(\frac{59}{17}\right)^n\right).$$

$$e_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4n}\right)^{2n-3}, \qquad s_n = \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{4}{5}\,i\right)^n, \qquad i^2 = -1\,.$$

Direkter Nachweis der Konvergenz:

Beispiel: Gegeben ist die Folge

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{2n^2\left(2^n+7^n\right) - 2^{n+1} + 7^n \cdot n}{7^n \cdot n^2 - 7^n} \text{ für } n \geq 2.$$

Vermutet wird, dass die Folge gegen 2 konvergiert.

Nachweis: für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
|a_n - 2| \, &= \, \left| \frac{2n^2 \left(2^n + 7^n\right) - 2^{n+1} + 7^n \cdot n}{7^n \cdot n^2 - 7^n} - 2 \right| \\
&= \left| \frac{2^{n+1} \cdot n^2 + 2 \cdot 7^n \cdot n^2 - 2^{n+1} + 7^n \cdot n - 2 \cdot 7^n \cdot n^2 + 2 \cdot 7^n}{7^n \cdot n^2 - 7^n} \right| \\
&= \left| \frac{2^{n+1} \cdot (n^2 - 1) + 7^n \cdot (n + 2)}{7^n \cdot (n^2 - 1)} \right|
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{2^{n+1}}{7^n} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} + \frac{n + 2}{n^2 - 1} \right| = \; 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} |a_n - 2| \, = 0$$

Beispiel: Klausur 06 Struckmeier/Kiani: Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2 - 5t + 4.$$

a) Leiten Sie die Rekursionsformel, die das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f mit dem Startwert $t_0 = 5$ erzeugt, her.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $t_0 = 5, \quad t_{n+1} = \dfrac{t_n^2 - 4}{2t_n - 5}; \; n \in \mathbb{N}_0$ nach unten beschränkt ist.

c) Beweisen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung: Zunächst allg. Definition des Newtonverfahrens:

Gesucht Nullstelle der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ nahe einer vorgegebenen Zahl $t_0 \in D \subset \mathbb{R}$

Iteration: so lange

$|f'(t_n)| > \epsilon > 0$, und

$|f(t_n)| > Tol$, und

$n <$ maximale Schrittzahl

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} \quad n \geq 0$$

Konkrete Aufgabe;

a) $t_0 = 5\,, \quad t_{n+1} := t_n - \dfrac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \dfrac{t_n^2 - 5t_n + 4}{2t_n - 5} = \dfrac{t_n^2 - 4}{2t_n - 5}.$

b) • Falls die Folge gegen ein $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} t_{n+1} = \lim_{n\to\infty} t_n = t \qquad \text{aber auch:}$$

$$\begin{aligned} t = \lim_{n\to\infty} t_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} t_n - \frac{t_n^2 - 5t_n + 4}{2t_n - 5} \\ &= t - \frac{t^2 - 5t + 4}{2t - 5} \iff t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) = 0 \end{aligned}$$

Als Grenzwert kommen also nur die Zahlen 1 oder 4 in Frage.

- Monotonie + Beschränktheit:
  Teste ob die Werte monoton steigen oder fallen
  natürlich muss i. A. weder das Eine noch das Andere der Fall sein.

  Hier gilt: $t_0 = 5, \qquad t_1 = 5 - \dfrac{5^2 - 5^2 + 4}{10 - 5} \, = \, 4.2 < 5.$

  Wir versuchen zu zeigen, dass die Folge fällt und nach unten durch 4 beschränkt ist.

  Beschränktheit nach unten: Induktionsbehauptung $t_n > 4$.

  Anfang: $t_0 = 5 \, > \, 4$.
  Voraus.: Es gelte $t_n > 4$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}_0$.
  Behauptung : Dann gilt auch $t_{n+1} > 4$.

Beweis :

$$
\begin{aligned}
t_{n+1} > 4 &\iff \frac{t_n^2 - 4}{2t_n - 5} > 4 \qquad \text{(Nenner } > 0) \\
&\iff t_n^2 - 4 > 8t_n - 20 \\
&\iff t_n^2 - 8t_n + 16 = (t_n - 4)^2 > 0
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $t_n \neq 4$ erfüllt. Es folgt die Behauptung.

Monotonie:

$$t_n - t_{n+1} = \frac{t_n^2 - 5t_n + 4}{2t_n - 5} > 0 \quad \text{(Nenner} > 0)$$

$$\iff t_n^2 - 5t_n + 4 > 0$$

$$\left(t_n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > 0$$

Nach Teil b: $t_n > 4$ damit gilt
$t_n - \dfrac{5}{2} > \dfrac{3}{2}$ oder $\left(t_n - \dfrac{5}{2}\right)^2 > \dfrac{9}{4}$.
Monotonie + Beschränktheit $\Longrightarrow$ Konvergenz.

Es gilt $t_n \to 4$