Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2011
Dr. Hanna Peywand Kiani

Anleitung zu Blatt 3 Differentialgleichungen II
06.05.2011

Burgers-Gleichung
Normalformen von linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Ergänzende Skizzen : vor Ort

Burgers-Gleichung

$$\boxed{u_t + uu_x \;=\; u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x \;=\; 0\,, \qquad u(x,0) \;=\; u_0(x)}$$

Charakteristiken: $x(t)$ löst $\quad \dfrac{dx}{dt} = u$

Entlang der Kurven $(x(t), t)$ gilt :

$$\frac{du}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}\, u\,(x(t), t) \;=\; u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_x \cdot u + u_t$$

also für jede Lösung der PDE

$$\frac{du}{dt} = u_x \cdot u + u_t \;=\; 0$$

$\Longrightarrow$ Lösung konstant entlang Charakteristik

$\Longrightarrow$ u konstant entlang Charakteristik

$\Longrightarrow$ $\dot{x}(t) = u$ konstant entlang Charakteristik

$\Longrightarrow$ Charakteristik hat konstante Steigung

$\Longrightarrow$ u Charakteristiken sind Geraden

Idee : Bestimme zu $(x(t), t)$ den Startwert $x_0 = x(0)$ in der Form

$x_0 = x_0(x, t)$

Dann gilt $\quad u(x, t) = u_0\,(x_0(x, t))$

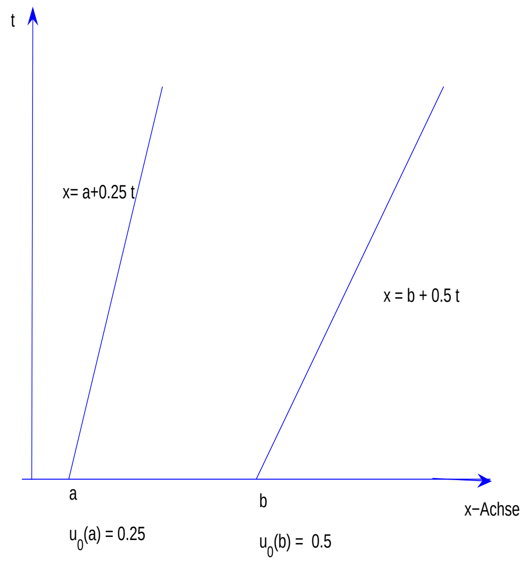
Frage : Geht das immer eindeutig?

Fall 1) u_0 stetig und $\quad u_0(a) \leq u_0(b) \quad \forall\, a \leq b\,.$

Dann erhält man mit $\dot{x}_a(t) = u_0(a)$ und $\dot{x}_b(t) = u_0(b)$

$$\dot{x}_b \;>\; \dot{x}_a \qquad \forall\, b \geq a$$

x wächst auf der Charakteristik durch (b,0) schneller als auf der Charakteristik durch (a,0). Qualitativ erhält man folgendes Bild

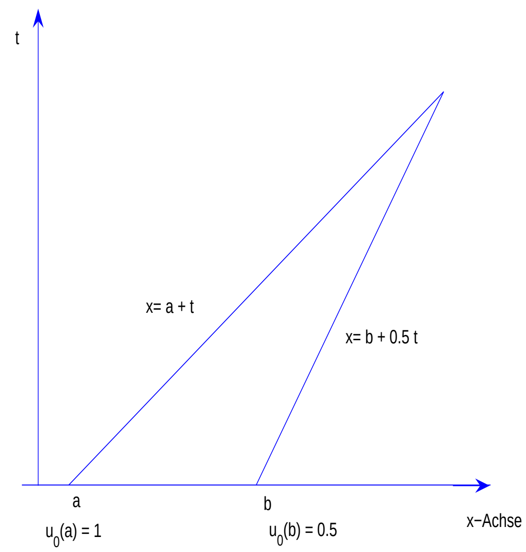


Die Charakteristik durch (a,0) kann die Charakteristik durch (b,0) nicht einholen. Es gibt keine Schnittpunkte von Charakteristiken! Lösung ist eindeutig.

Fall 2) u_0 stetig und $u_0(a) > u_0(b)$ für irgendein $a < b$. Dann gilt

$$\dot{x}_a > \dot{x}_b$$

Die Charakteristik durch (a,0) holt die Charakteristik durch (b,0) irgendwann ein! Es kommt zu Mehrdeutigkeiten!!

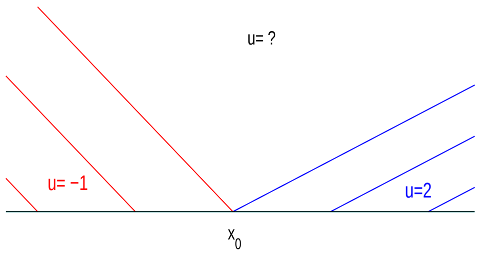


Die Mehrdeutigkeit tritt spätestens dann auf, wenn für ein x_0 und ein $\delta \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$x_0 + u_0(x_0) \cdot t = (x_0 + \delta) + u_0(x_0 + \delta) \cdot t\,.$$

Fall 3) u_0 monoton steigend aber nicht stetig.
Es gibt irgendwo einen Sprung in den Steigungen und damit Gebiete in denen keine Charakteristiken verlaufen.

Beispiel: Burgers-Gleichung mit $u(x,0) = \begin{cases} -1 & x < x_0 \\ 2 & x \geq x_0 \end{cases}$

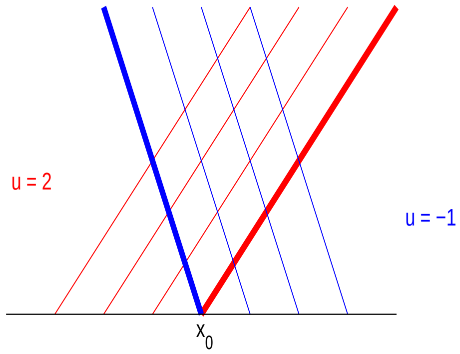


$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x \leq x_0 - t,\ t > 0 \\ ? & x_0 - t < x < x_0 + 2t \\ 2 & x \geq x_0 + 2t\,. \end{cases}$$

Bemerkung (irrelevant für die Übungen): Der charakteristikenfreie Bereich wird durch eine sogenannte Verdünungswelle $u(x,t) = \dfrac{x - x_0}{t}$ *aufgefüllt.*

Fall 4) u_0 springt nach unten.
Es gibt irgendwo einen Sprung in den Steigungen und die Charakteristiken schneiden sich.

Beispiel: Burgersgleichung mit $u(x,0) = \begin{cases} u_l = 2 & x < x_0 \\ u_r = -1 & x \geq x_0 \end{cases}$



Bemerkung (irrelevant für die Übungen): Die Unstetigkeit bewegt sich entlang einer sogenannten Stoßswelle (Schock) die (der) sich mit der Geschwindigkeit $s = \dfrac{u_l + u_r}{2}$ *bewegt.*

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x < x_0 + \dfrac{t}{2}, \\ -1 & x > x_0 + \dfrac{t}{2}. \end{cases}$$

Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\boxed{a(x,t)u_{xx} + 2b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{tt} \;=\; h(x,t,u,u_x,u_t)}$$

Typen:

$D = \; ac - b^2 < 0$: hyperbolisch,
$D = \; ac - b^2 = 0$: parabolisch,
$D = \; ac - b^2 > 0$: elliptisch.

Der Typ kann von x und t abhängen!

Unterschiedliche Verfahren sind geeignet, unterschiedliche Vorgabe von Anfangs- bzw. Randdaten für vernünftige Aufgabenstellung erforderlich. **Normalformen:**

hyperbolisch: $u_{xx} - u_{tt} = G(x,t,u,u_x,u_t)$
oder: integrable Nrmalform $u_{xt} = G(x,t,u,u_x,u_t)$

parabolisch: $u_{xx} = G(x,t,u,u_x,u_t)$

elliptisch: $u_{xx} + u_{tt} = G(x,t,u,u_x,u_t)$

Ziel: Herstellung der Normalform durch Einführung neuer Variablen
$\eta = \eta(x,t)$, $\tau = \tau(x,t)$,
sowie der neuen Funktion: $v(\eta(x,t),\tau(x,t)) = u(x,t)$ ein.
Regularitätsbedingung: $\eta_x\tau_t - \eta_t\tau_x \neq 0$.

Differentialausdrücke werden mittels Kettenregel umgerechnet:

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\eta \cdot \eta_x + v_\tau \cdot \tau_x \,, \\
u_t &= v_\eta \cdot \eta_t + v_\tau \cdot \tau_t \,, \\
u_{xx} &= v_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + 2v_{\eta\tau} \cdot \eta_x\tau_x + v_{\tau\tau} \cdot (\tau_x)^2 \;+\; (v_\eta\eta_{xx} + v_\tau\tau_{xx}) \,, \\
u_{xt} &= v_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_t + v_{\eta\tau} \cdot (\tau_t\eta_x + \tau_x\eta_t) + v_{\tau\tau} \cdot \tau_t\tau_x \;+ (v_\eta\eta_{xt} + v_\tau\tau_{xt}) \,, \\
u_{tt} &= v_{\eta\eta} \cdot (\eta_t)^2 + 2v_{\eta\tau} \cdot \eta_t\tau_t + v_{\tau\tau} \cdot (\tau_t)^2 + (v_\eta\eta_{tt} + v_\tau\tau_{tt}) \,.
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert neue DGL

$$Av_{\eta\eta} + 2Bv_{\eta\tau} + Cv_{\tau\tau} \;=\; \tilde{h}(\eta,\tau,v,v_\eta,v_\tau)$$

Frage: Wie sollte man η, τ wählen?

Lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Ableitungen zweiter Ordnung

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

oder in Matrixschreibwese:

$$(\nabla^T A \nabla)u + (b^T\nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

A ist reell und symmetrisch: Bestimme EWe λ_1, λ_2 und zugehörige, orthonormierte EV'n $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$.

Setze $S = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$, $\quad \begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

Dann gilt $\nabla_{xt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = S \cdot \nabla_{\eta\tau} = S \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix}$

und Koordinatenwechsel führt zur **Diagonalform**:

$$\lambda_1 v_{\eta\eta} + \lambda_2 v_{\tau\tau} + p_1 v_\eta + p_2 v_\tau + dv = H$$

Im hyperbolischen und elliptischen Fall führt die Skalierung :

$\tilde{x} = \eta/\sqrt{\lambda_1}$, $\tilde{t} = \tau/\sqrt{\lambda_2}$

auf die **Normalformen**

$$\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} \pm v_{\tilde{t}\tilde{t}} + p_1 v_{\tilde{x}} + p_2 v_{\tilde{t}} + dv = H$$

Im parabolischen Fall fehlt eine der zweiten Ableitungen z.B. $\tilde{u}_{\tau\tau}$. Man löst dann nach $\tilde{u}_\tau$ auf.

Beispiel 1: $u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xt} + u_{tt} + 3u_x = \cos(x)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{9}$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad$ (elliptisch)

Eigenvektoren:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+t \\ x-t \end{pmatrix}$$

Umrechnung der Terme niedriger Ordnung:

$$u_x = v_\eta \cdot \eta_x + v_\tau \cdot \tau_x = \frac{1}{\sqrt{2}} v_\eta + \frac{1}{\sqrt{2}} v_\tau,$$

$$\eta + \tau = \sqrt{2}x \Longrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta+\tau)\right).$$

Alte DGL: $u_{xx} - 2\frac{1}{3}u_{xt} + u_{tt} + 3u_x = \cos(x)$

Neue DGL hat **Diagonalform**:
$\frac{2}{3}v_{\eta\eta} + \frac{4}{3}v_{\tau\tau} + \frac{3}{\sqrt{2}}v_\eta + \frac{3}{\sqrt{2}}v_\tau = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta+\tau)\right)$.

Erneute Transformation: $\tilde{x} = \eta/\sqrt{\lambda_1}$, $\tilde{t} = \tau/\sqrt{\lambda_2}$

liefert die **Normalform:**

$\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} \pm v_{\tilde{t}\tilde{t}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}v_{\tilde{x}} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}v_{\tilde{t}} = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{t})\right)$.

Zurück zum allg. Fall: nicht konstante Koeffizienten

Wir hatten

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = h(x,y,u,u_x,u_y)$$

und nach der Transformation die neue DGL

$$Av_{\eta\eta} + 2Bv_{\eta\tau} + Cv_{\tau\tau} = \tilde{h}(\eta,\tau,v,v_\eta,v_\tau)$$

Um eine möglichst einfache Form zu erhalten fordere $A = C = 0$. Umrechnungen der Differentialausdrücke führt für die Höhenlinien von η bzw. τ zur Forderung:

$$\boxed{a(y')^2 - 2by' + c = 0}$$

Integration der zwei Lösungen $y'_{1,2}$ liefert Charakteristiken $C_1 = \eta(x,y)$, $C_2 = \tau(x,y)$

Beispiel 2:

$12u_{xx} + 7u_{xy} - 12u_{yy} = 0$

Typ: $12(-12) - (\frac{7}{2})^2 < 0 \Longrightarrow$ hyperbolisch.

Charakteristische DGL: $12(y')^2 - 7y' - 12 = 0$

$y' = \frac{7}{24} \pm \sqrt{\frac{49}{24^2} + 1} = \frac{7}{24} \pm \frac{25}{24}$

$y'_1 = \frac{4}{3}, \qquad y'_2 = -\frac{3}{4}$

$y_1 = \frac{4}{3}x + \tilde{c}_1, \qquad y_2 = -\frac{3}{4}x + \tilde{c}_2$

$\eta = C_1 = 3y - 4x, \qquad \tau = C_2 = 4y + 3x$

Regularitätsbed.: $\eta_x\tau_y - \eta_y\tau_x = -4\cdot 4 - 3\cdot 3 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= v_{\eta\eta}\cdot(\eta_x)^2 + 2v_{\eta\tau}\cdot\eta_x\tau_x + v_{\tau\tau}\cdot(\tau_x)^2 + v_\eta\eta_{xx} + v_\tau\tau_{xx} \\
&= v_{\eta\eta}\cdot(-4)^2 - 24v_{\eta\tau} + 9v_{\tau\tau}, \\
u_{xy} &= v_{\eta\eta}\cdot\eta_x\eta_y + v_{\eta\tau}\cdot(\tau_y\eta_x + \tau_x\eta_y) + v_{\tau\tau}\cdot\tau_y\tau_x + v_\eta\eta_{xy} + v_\tau\tau_{xy}, \\
&= \\
u_{yy} &= 9v_{\eta\eta} + 24v_{\eta\tau} + 16v_{\tau\tau}.
\end{aligned}$$

Neue DGL:

$12u_{xx} + 7u_{xy} - 12u_{yy} = 0 \Longleftrightarrow$

$0 \cdot v_{\eta\eta} + (-24 \cdot 12 - 7 \cdot 7 - 12 \cdot 24)v_{\eta\tau} + 0 \cdot v_{\tau\tau} = 0$

$\iff v_{\eta\tau} = 0$ (integrable Normalform)

$(v(\eta,\tau)_\eta)_\tau = 0 \iff v(\eta,\tau)_\eta = f(\eta)$

$v(\eta,\tau)_\eta = f(\eta) \iff v(\eta,\tau) = F(\eta) + g(\tau)$

Jede Funktion der Form

$u(x,y) = F(3y-4x) + g(4y+3x)$

löst die PDE. Sind Anfangswerte gegeben, z.B.:

$$u(x,0) = 0 \qquad u_y(x,0) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

so erhält man:

$$F(-4x) + g(3x) = 0, \qquad 3F'(-4x) + 4g'(3x) = x$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $\frac{3}{4}$ und Integration der zweiten Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}F(-4x) + \frac{3}{4}g(3x) &= 0 \\ -\frac{3}{4}F(-4x) + \frac{4}{3}g(3x) &= \frac{x^2}{2} + c\,. \end{aligned}$$

$$\iff g(3x) = -F(-4x) = \frac{1}{25}\,(6x^2 + 12c)$$

Setze $z = 3x$. Dann ist $g(z) = \frac{1}{25}\,(\frac{2}{3}z^2 + 12c)$.

Analog liefert $z = -4x$: $F(z) = -\frac{1}{25}\,(\frac{3}{8}z^2 + 12c)$.

Damit erhält man:

$u(x,y) = \frac{1}{25}\,\left[\frac{2}{3}(4y+3x)^2 - \frac{3}{8}(3y-4x)^2\right]$

Bemerkungen:

- Im Beispiel 2: konstante Koeffizienten! Man hätte wie im Beispiel 1) vorgehen können. Dabei hätte man aber die Normalform $u_{xx} - u_{yy} = 0$ hergeleitet, und nicht die integrable Form!
- Im parabolischen Fall erhält man nur eine charakt. Richtung C. Als zweite Variable geht meist eine der alten Variablen ($x, y, t,$ etc.). Siehe Beispiel 3.
- Im elliptischen Fall erhält man komplexe Richtungen $\bar{C}_1 = C_2$ und verwendet Real- und Imaginärteile als neue Variablen. Siehe Beispiel 4.

Beispiel 3:

$u_{xx} - 4xu_{xt} + 4x^2 u_{tt} + u_x - 2xu_t = 0$

Typ: $a = 1, b = -2x, c = 4x^2 \Longrightarrow ac - b^2 = 0 \Longrightarrow$ parabolisch.

Charakteristische DGL: $(t')^2 + 4xt' + 4x^2 = (t' + 2x)^2 = 0$

Es gibt nur eine Lösung $t' = -2x \Longleftrightarrow t = -x^2 + C$.

Wähle als neue Variable $\tau = t + x^2$

und η unabh. von τ z.B. $\eta = x$

Errechnen von $u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}$ und Einsetzen in die DGL liefert neue DGL:

$v_{\eta\eta} + 2v_\tau + v_\eta = 0 \Longleftrightarrow v_\tau = -\frac{1}{2}(v_{\eta\eta} + v_\eta)$

Beispiel 4:

$x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + 2xu_x - xy - x = 0 \qquad x, y > 0$.

Typ: $a = x^2, b = 0, c = y^2 \Longrightarrow ac - b^2 = x^2 y^2 \Longrightarrow$

parabolisch für $x = 0$ oder $y = 0$, sonst elliptisch.

Charakteristische DGL: $x^2 (y')^2 + y^2 == 0$

Es gibt ein Paar komplex konjugierter Lösungen:

$\frac{y'}{y} = \pm\sqrt{\frac{-1}{x^2}} = \pm\frac{i}{x}$

$\Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = \pm i\frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln(y) = C \pm i\ln(x)$.

$C = \ln(y) \pm i\ln(x) \longrightarrow \eta = \ln(y),\ \tau = \ln(x)$

Errechnen von $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ und Einsetzen in die DGL liefert neue DGL:

$$v_{\tau\tau} + v_{\eta\eta} + v_\tau - v_\eta - e^\tau(e^\eta + 1) = 0.$$