Department Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2009
Dr. Hanna Peywand Kiani

Schwache Formulierung der Poisson-Gleichung
Finite Elemente Methoden
Fouriermethoden für Wärmeleitungsgleichung

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Schwache Formulierung von Randwertaufgaben

Eindimensionales Beispiel:

$-\,u''(x) = f(x) \qquad \text{für} \;\; x \in (0, L)\,,$
$u(0) = 0\,, \quad u'(L) + au(L) = r, \qquad a, r \in \mathbb{R}\,.$

Sei v eine differenzierbare Funktion mit $v(0) = 0$. Dann gilt

$$-\,u''(x) = f(x) \implies -\,u''(x)v(x) = f(x)v(x) \implies -\int_0^L u''(x)v(x)\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx$$

Partielle Integration liefert

$$-\,[\,u'(x)v(x)\,]_0^L + \int_0^L u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx$$

$$\iff -u'(L)v(L) + u'(0)v(0) + \int_0^L u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx$$

$$\iff (au(L) - r)v(L) + \int_0^L u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^L f(x)v(x)\,dx$$

Umsortierung nach den Unbekannten u ergibt die **schwache Formulierung:**

$$\boxed{\int_0^L u'(x)v'(x)\,dx + au(L)v(L) = \int_0^L f(x)v(x)\,dx + rv(L)}$$

$$\forall v \in C^1(0,1) \cap C([0,1]),\; v(0) = 0$$

Vorteil: u muss nicht zweimal diffbar sein!

Die Testfunktionen v müssen dort den Wert Null annehmen, wo Funktionswerte für u vorgegeben sind.

Mehrdimensionales Beispiel:

Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^2$ mit dem Rand $\delta\Omega$. Nach Gauß gilt für ein hinreichend glattes Vektorfeld F

$$\int\int_\Omega \operatorname{div} F\, d(x,y) = \int_{\delta\Omega} F \cdot n\, ds$$

mit $n =$ äußerer Normaleneinheitsvektor auf dem Rand von Ω.

Setzt man $F = v \cdot \nabla u$, und beachtet

$$\operatorname{div} F = v \cdot \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u$$

so erhält man

$$\int\int_\Omega v \cdot \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u\, d(x,y) = \int_{\delta\Omega} v \cdot \frac{\delta u}{\delta n}\, ds$$

Sei nun die folgende RWA gegeben:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & &\text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x,y) &= g(x,y) & &\text{auf } \Gamma_1 \subset \delta\Omega, \\ \partial_n u(x,y) + au(x,y) &= r(x,y) & &\text{auf } \Gamma_2 \subset \delta\Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma_2, \cup \Gamma_1$ eine disjunkte Zerlegung des Randes $\delta\Omega$ sei.

Die **schwache Formulierung** lautet dann:

$$\begin{aligned} &-\int\int_\Omega v \cdot \Delta u\, d(x,y) = \int\int_\Omega v \cdot f\ d(x,y) \\ \Longleftrightarrow &\int\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, d(x,y) - \int_{\delta\Omega} v \cdot \frac{\delta u}{\delta n}\, ds = \int\int_\Omega v \cdot f\ d(x,y) \\ \Longleftrightarrow &\int\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, d(x,y) + \int_{\Gamma_2} v \cdot (au(x,y) - r(x,y))\, ds = \int\int_\Omega v \cdot f\ d(x,y) \\ \Longleftrightarrow &\int\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, d(x,y) + \int_{\Gamma_2} au \cdot v\, ds = \int\int_\Omega v \cdot f\ d(x,y) + \int_{\Gamma_2} v\, r\, ds \end{aligned}$$

für alle $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $v = 0$ auf Γ_1.

Finite Elemente Methode

Bei der praktischen Rechnung beschränkt man sich auf endlich viele Testfunktionen v_j

und nimmt an, dass die (Näherungs-)Lösung sich als Linearkombination endlich vieler Basiselemente $b_j(\boldsymbol{x})$, $j = 0, 1, \ldots, n+1$ darstellen läßt.

Wir nehmen hier an, dass die Menge der Basisfunktionen mit der Menge der Testfunktionen übereinstimmt.

Eindimensionales Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&- u''(x) = f(x) \qquad \text{für } x \in (0, L),\\
&u(0) = \beta, \quad u'(L) + au(L) = r, \qquad a, r \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Ansatz $\boxed{u(x) = \sum_{i=0}^{n+1} u_i \cdot b_i(x)}$

Schwache Formulierung

$$
\int_0^L u'(x)v'(x)\,dx + au(L)v(L) = \int_0^L f(x)v(x)\,dx + rv(L)
$$
$$
\forall v \in C^1(0,1) \cap C([0,1]),\ v(0) = 0
$$

liefert für die Testfunktionen

$v_j(0) = 0$, $v_j(x) := b_j(x)$, $j = 1, \ldots, n+1$ die $n+1$ Bedingungen

$$
\sum_{i=0}^{n+1} \int_0^L u_i b_i'(x) b_j'(x)\,dx + a \sum_{i=0}^{n+1} u_i b_i(L) b_j(L) = \int_0^L f(x) b_j(x)\,dx + r b_j(L)
$$

sowie $u_0 \cdot b_0(0) = \beta$

Dies ist ein Gleichungssystem für die Unbekannten u_i

Idee: Wähle die Funktionen b_j so, dass möglichst viele $b_i'(x)b_j'(x) = 0$

Konkret im eindimensionlen Fall : Hütchenfunktionen

O.B.d.A. sei $L = 1$ (sonst $x = a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$).

Unterteile das Intervall in $n+1$ Teilintervalle

$$
0 = x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} = 1, \qquad x_k = k \cdot h = \frac{k}{n+1}
$$

Definiere für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$
b_i(x) := \begin{cases}
\dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{x - \frac{i-1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = (n+1)x - (i-1) & x \in [x_{i-1}, x_i]\\[2ex]
\dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{\frac{i+1}{n+1} - x}{\frac{1}{n+1}} = (i+1) - (n+1)x & x \in [x_i, x_{i+1}]\\[2ex]
0 & \text{sonst}
\end{cases}
$$

$$b_0(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} = \dfrac{\frac{1}{n+1} - x}{\frac{1}{n+1}} = 1 - (n+1)x & x \in [0, h] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_{n+1}(x) := \begin{cases} \dfrac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} = \dfrac{x - \frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = (n+1)x - n & x \in [x_n, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verallgemeinerte Ableitung :

$$b_i'(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}} = (n+1) & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{-1}{x_{i+1} - x_i} = -(n+1) & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog b_0', b_{n+1}' .

Schwache Formulierung: für $j = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \int_0^L u_i b_i'(x) b_j'(x)\, dx = \int_0^L f(x) b_j(x)\, dx\,,$$

und für $j = n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \int_0^L u_i b_i'(x) b_{n+1}'(x)\, dx + a u_{n+1} b_{n+1}(1) b_{n+1}(1) = \int_0^L f(x) b_{n+1}(x)\, dx + r b_{n+1}(1)$$

Konkretes Beispiel: für $n = 3$ und

$-u''(x) = 1$ für $x \in (0,1)$,
$u(0) = 1$, $u'(1) - u(1) = 1,.$

erhalten wir $u_0 = 1$ und

$$b_0(x) := \begin{cases} 1 - 4x & x \in [0, h] = [0, 0.25] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad b_4(x) := \begin{cases} 4x - 3 & x \in [0.75, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$b_1(x) := \begin{cases} 4x & x \in [0, 0.25] \\ 2 - 4x & x \in [0.25, 0.5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad b_2(x) := \begin{cases} 4x - 1 & x \in [0.25, 0.5] \\ 3 - 4x & x \in [0.5, 0.75] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_3(x) := \begin{cases} 4x - 2 & x \in [0.5, 0.75] \\ 4 - 4x & x \in [0.75, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die verallgemeinerten Ableitungen gilt

$$b_i'(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}} = 4 & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{-1}{x_{i+1} - x_i} = -4 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die schwache Formulierung liefert

<u>**für j=1**</u> $$\sum_{i=0}^{4} \int_0^L u_i b_i'(x) b_1'(x)\, dx = \int_0^L f(x) b_1(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^{0.25} u_0 b_0'(x) b_1'(x)\, dx + \int_0^{0.5} u_1 b_1'(x) b_1'(x)\, dx + \int_{0.25}^{0.5} u_2 b_2'(x) b_1'(x)\, dx = \int_0^{0.5} b_1(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^{0.25} 1(-4)(4) dx + \int_0^{0.5} u_1 4^2\, dx + \int_{0.25}^{0.5} u_2 \cdot 4(-4)\, dx = 0.25$$

$$\Longrightarrow -4 + 8u_1 - 4u_2 = \frac{1}{4}\,.$$

<u>**für j=2**</u>

$$\sum_{i=0}^{4} \int_0^L u_i b_i'(x) b_2'(x)\, dx = \int_0^L f(x) b_2(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \int_{0.25}^{0.5} u_1 b_1'(x) b_2'(x)\, dx + \int_{0.25}^{0.75} u_2 b_2'(x) b_2'(x)\, dx + \int_{0.5}^{0.75} u_3 b_3'(x) b_2'(x)\, dx = \int_{0.25}^{0.75} b_2(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow -4u_1 + 8u_2 - 4u_3 = \frac{1}{4}\,.$$

<u>**für j=3**</u>

$$\sum_{i=0}^{4} \int_0^L u_i b_i'(x) b_3'(x)\, dx = \int_0^L f(x) b_3(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow \int_{0.5}^{0.75} u_2 b_2'(x) b_3'(x)\, dx + \int_{0.5}^{1} u_3 b_3'(x) b_3'(x)\, dx + \int_{0.75}^{1} u_4 b_4'(x) b_3'(x)\, dx = \int_{0.5}^{1} b_3(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow -4u_2 + 8u_3 - 4u_4 = \frac{1}{4}\,.$$

<u>**und für j=4**</u>

$$\sum_{i=0}^{4} \int_0^L u_i b_i'(x) b_4'(x)\, dx + a u_4 b_4(1) b_4(1) = \int_0^L f(x) b_4(x)\, dx + r b_4(1)$$

$$\Longrightarrow \int_{0.75}^{1} u_3 b_3'(x) b_4'(x)\, dx + \int_{0.75}^{1} u_4 b_4'(x) b_4'(x)\, dx + a u_4 = \int_{0.75}^{1} b_4(x)\, dx + r$$

$$\Longrightarrow -4u_3 + 4u_4 - u_4 = \frac{1}{8} + 1\,.$$

Insgesamt haben wir vier Lineare Gleichungen für die vier Unbekannten $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ .$

Die Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{aligned}
u_t \,-\, cu_{xx} \,&=\, \phi(x,t) && c>0,\, x\in(a,b),\, t>0 \\
u(x,0) \,&=\, u_0(x) && x\in(a,b), \\
u(a,t) \,&=\, h(t) && t>0, \\
u(b,t) \,&=\, g(t) && t>0,
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) := u(x,t) - h(t) - \frac{x-a}{b-a}\,(g(t)-h(t))$$

$$v(a,t) = u(a,t) - h(t) - \frac{a-a}{b-a}\,(g(t)-h(t)) = 0$$

$$v(b,t) = u(b,t) - h(t) - \frac{b-a}{b-a}\,(g(t)-h(t)) = 0$$

Neue DGL für v:

$$u(x,t) := v(x,t) + h(t) + \frac{x-a}{b-a}\,(g(t)-h(t))$$

$$u_t(x,t) := v_t(x,t) + \dot{h}(t) + \frac{x-a}{b-a}\,(\dot{g}(t)-\dot{h}(t))$$

$$u_x(x,t) := v_x(x,t) + 0 + \frac{1}{b-a}\,(g(t)-h(t))$$

$$u_{xx}(x,t) := v_{xx}(x,t)$$

DGL : $\quad v_t - cv_{xx} = \phi(x,t) - \dot{h}(t) - \dfrac{x-a}{b-a}\,(\dot{g}(t)-\dot{h}(t)) =: f(x,t)$

Neue Anfangswerte : $\quad v(x,0) = u(x,0) - h(0) - \dfrac{x-a}{b-a}\,(g(0)-h(0)) = v_0(x).$

Das neue Problem besteht aus :

i. d. R. inhomogener DGL

inhomogene Anfangswerte

homogene Randdaten

Schritt 2) Zerlegung in zwei einfachere Probleme

Wir betrachten die zwei Aufgaben:

$I)$	$II)$
$\tilde{v}_t - c\tilde{v}_{xx} = 0$	$\hat{v}_t - c\hat{v}_{xx} = f(x,t)$
$\tilde{v}(x,0) = v_0(x)$	$\hat{v}(x,0) = 0$
$\tilde{v}(a,t) = \tilde{v}(b,t) = 0$	$\hat{v}(a,t) = \hat{v}(b,t) = 0$

Problem I): Aus den Produktansätzen wissen wir noch, dass ein Ansatz der Form

$$\tilde{v}(x,t) = \sum_I q_n(t)p_n(x)$$

zur DGL $p'' = -\lambda p$ führt. Die Randdaten liefern dann

$$p_n(x) = \sin\left(n\omega(x-a)\right), \quad \omega = \frac{\pi}{b-a}, \quad \lambda_n = n^2\omega^2$$

$$\dot{q}_n(t) = \; -c\lambda_n q_n(t), \Longrightarrow q_n(t) = a_n e^{-c\omega^2 n^2 t}$$

$$\boxed{\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin\left(n\omega(x-a)\right)}$$

Die Anfangswerte liefern die Bedingung $\tilde{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(n\omega(x-a)\right) = v_0(x)$ also

$$\boxed{\alpha_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b v_0(x)\sin(k\omega(x-a))\,dx.}$$

Problem II):

Jede Funktion der Form $\hat{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\left(n\omega(x-a)\right)$

erfüllt bei hinreichend glatten $a_n(t)$ die Randbedingungen. Wir setzen diesen Ansatz in die DGL $\quad \hat{v}_t - c\hat{v}_{xx} = f(x,t) \quad$ ein und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t)\right] \sin\left(n\omega(x-a)\right) = f(x,t)$$

Mit der Fourierreihe der ungeraden period. Fortsetzung von $f(x,t)$ bzgl. x

$$F_f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(n\omega(x-a)))$$

erhält man für jedes a_n eine lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t)$$

Die Lösung muss noch die Anfangswerte erfüllen

$$\hat{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin\left(n\omega(x-a)\right) = 0 \Longrightarrow a_n(0) = 0$$

Man berechnet die $a_n(t)$, erhält $\hat{v}$ und setzt die Lösung des ursprünglichen Problems zusammen:

$$u(x,t) = \hat{v}(x,t) \;+\; \tilde{v}(x,t) \;+\; h(t) \;+\; \frac{x-a}{b-a}\,(g(t)-h(t))$$

Beispiel 1)

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = 0 && 0 < t,\, 0 < x < \pi/2, \\ &u(x,0) = \sin(x) - \frac{2x}{\pi} && 0 \le x \le \pi/2, \\ &u(0,t) = v(\frac{\pi}{2},t) = 1 - e^{-t} && t > 0. \end{aligned}$$

Es ist also

$$c = 1,\; a = 0,\; b = \pi/2,\; \omega = \pi/(b-a) = 2\,.$$

Schritt 1) Randdaten homogenisieren

$$u = v + h + \frac{x-a}{b-a}\,(g-h)$$

hier $\quad g(t) = h(t) = 1 - e^{-t}$, also

$$u(x,t) = v(x,t) + 1 - e^{-t}$$

$u_t = v_t + e^{-t} \qquad u_{xx} = v_{xx}$

$v(x,0) = u(x,0) - 1 + e^0 = u(x,0)$

$v(0,t) = v(\frac{\pi}{2},t) = 0$

Neue Aufgabe mit homogenen Randdaten:

$$\begin{aligned} &v_t - v_{xx} = -e^{-t} && 0 < t,\, 0 < x < \pi/2, \\ &v(x,0) = \sin(x) - \frac{2x}{\pi} && 0 \le x \le \pi/2, \\ &v(0,t) = v(\frac{\pi}{2},t) = 0 && t > 0. \end{aligned}$$

1. Teilaufgabe:

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} = 0 && 0 < t,\ 0 < x < \pi/2,\\
&\tilde{v}(x,0) = \sin(x) - \frac{2x}{\pi} && 0 \le x \le \pi/2,\\
&\tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(\frac{\pi}{2},t) = 0 && t > 0.
\end{aligned}$$

Wie oben erhält man

$$\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin\left(n\omega(x-a)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-4n^2 t} \sin\left(2nx\right)$$

mit $\quad \alpha_n = \dfrac{2}{b-a} \displaystyle\int_a^b v_0(x) \sin(n\omega(x-a))\, dx.$

also $\quad \alpha_n = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{2x}{\pi}\right) \sin(2nx)\, dx.$

Berechnung der Fourierkoeffizienten

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin(2nx)\, dx = \frac{2n(-1)^n}{1-4n^2} \qquad \text{(2 x part. oder Formelsammlung)}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(2nx)\, dx = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{4n} \qquad \text{(1 x part. oder Formelsammlung)}$$

$$\alpha_n = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2n(-1)^n}{1-4n^2} - \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi(-1)^{n+1}}{4n}\right]$$

$$= \frac{8n(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} - \frac{8(-1)^{n+1}}{4n\pi} = \frac{2(-1)^n}{\pi}\left[\frac{4n}{(1-4n^2)} + \frac{1}{n}\right] = \frac{2(-1)^n}{n\pi(1-4n^2)}$$

$$\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi(1-4n^2)} e^{-4n^2 t} \sin\left(2nx\right))$$

2. Teilaufgabe:

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_t - \hat{v}_{xx} = -e^{-t} && 0 < t,\ 0 < x < \pi/2,\\
&\hat{v}(x,0) = 0 && 0 \le x \le \pi/2,\\
&\hat{v}(0,t) = \hat{v}(\frac{\pi}{2},t) = 0 && t > 0.
\end{aligned}$$

Ansatz wie oben $\hat{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(n\omega(x-a)\right)$

Mit der Fourierreihe von $f(x,t) = -e^{-t}$ bzgl. x

$$F_f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(n\omega(x-a)))$$

erhält man durch Einsetzen in die DGL für a_n

$$\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t)$$

Die Anfangswerte liefern $a_n(0) = 0$.

Hier haben wir also

$$\hat{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(2nx)$$

$$c_n(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} -e^{-t} \sin(2nx) dx = \frac{-4e^{-t}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2nx) dx$$

$$\begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \dfrac{-4e^{-t}}{n\pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Wegen der Anfangswerte (s.Oben) folgt für gerade n unmittelbar $a_n(t) = 0$.

Für ungerade n erhalten wir jeweils eine lineare, gewöhnliche, inhomogene Dgl:

$$\dot{a}_n(t) + 4n^2 a_n(t) = \frac{-4e^{-t}}{n\pi}$$

Lösung der zugh. homogenen Aufgabe:

$$\dot{a}_{n,h}(t) = -4n^2 a_{n,h}(t) \implies a_{n,h}(t) = \alpha_n e^{-4n^2 t}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe:

Spez. Ansatz : $a_{n,p} = \beta e^{-t}$

Einsetzen in Dgl. für a_n liefert:

$$-\beta e^{-t} + 4n^2\beta e^{-t} = -\frac{4e^{-t}}{n\pi} \implies \beta = \frac{-4}{n(4n^2-1)\pi}$$

Die allg. Lösung lautet somit

$$a_n(t) = \frac{-4e^{-t}}{n(4n^2-1)\pi} + \gamma_n e^{-4n^2 t}$$

Aus der Anfangsbedingung $a_n(0) = 0$ folgt (immer noch n ungerade)

$$a_n(0) = \frac{-4}{n(4n^2-1)\pi} + \gamma_n = 0 \implies \gamma_n = \frac{4}{n(4n^2-1)\pi}$$

Insgesamt also

$$a_n(t) = \frac{-4e^{-t}}{n(4n^2-1)\pi} + \frac{4}{n(4n^2-1)\pi} e^{-4n^2 t} = \frac{4}{n(4n^2-1)\pi}(e^{-4n^2 t} - e^{-t})$$

$$\hat{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(4(2n-1)^2-1)\pi}(e^{-4(2n-1)^2 t} - e^{-t}) \sin(2(2n-1)x)$$

und

$$u(x,t) = \tilde{v}(x,t) + \hat{v}(x,t) + 1 - e^{-t}$$

- Alternateive zum obigen Vorgehen bei der Lösungen der gewöhnlichen AWA

  $$\dot{a}_n(t) + 4n^2 a_n(t) = \frac{-4e^{-t}}{n\pi}, \qquad a_n(t) = 0$$

  geschlossene Lösungsdarstellung aus der Vorlesung DGL I

  $$a_n(t) = \int_0^t e^{-\dfrac{n^2\pi^2}{(\pi/2)^2}(t-s)} c_n(s) ds$$

  Für gerade n erhält man auch hier sofort Null. Für ungerade n rechnet man

  $$\begin{aligned} a_n(t) &= \int_0^t e^{-\frac{n^2\pi^2}{(\pi/2)^2}(t-s)} \frac{-4e^{-s}}{n\pi} ds = \frac{-4}{n\pi} \int_0^t e^{-\frac{4n^2\pi^2}{\pi^2} t} \cdot e^{4n^2 s} e^{-s} ds \\ &= \frac{-4}{n\pi} e^{-4n^2 t} \int_0^t e^{(4n^2-1)s} ds = \frac{-4}{n\pi} e^{-4n^2 t} \left. \frac{e^{(4n^2-1)s)}}{4n^2-1} \right|_0^t \\ &= \frac{4}{n\pi(4n^2-1)} e^{-4n^2 t} (1 - e^{(4n^2-1)t)} = \frac{4}{n\pi(4n^2-1)} (e^{-4n^2 t} - e^{-t}) \end{aligned}$$

- Alternative zu speziellen Ansätzen bei der Lösungen der gewöhnlichen AWA ist natürlich die Variation der Konstanten!

Andere Randbedingungen

Beispiel: periodische Randbedingungen

$$
\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = 0 && x \in (-1,1),\ t > 0\\
&u(-1,t) = u(1,t) && t > 0\\
&u_x(-1,t) = u_x(1,t) && t > 0\\
&u(x,0) = f(x) && x \in (-1,1).
\end{aligned}
$$

Ansatz wie gehabt : Produktansatz $u(x,t) = w(x).v(t)$

Einsetzen in DGL: $\dfrac{\dot{v}}{v} = \dfrac{w''}{w} = -\lambda$

Randwerte liefern:

$u(-1,t) = u(1,t) \longrightarrow w(1) = w(-1)$

$u_x(-1,t) = u_x(1,t) \longrightarrow w'(1) = w'(-1)$

Je nach Vorzeichen von λ, hat $w'' = -\lambda w$, als Lösungen:

$\lambda = 0 \Longrightarrow w(x) = a + bx, \quad w(1) = w(-1) \Longrightarrow w(x) = a$

$\lambda < 0 \Longrightarrow w(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

Einsetzen der Randwerte für w liefert $\lambda = 0 \vee a = b$. Nur letzteres ist möglich.

Einsetzen der Randwerte für w_x mit $a = b$ liefert $\lambda = 0 \vee a = b = 0$. Es gibt also keine nichttriviale Lösung.

$\lambda > 0 \Longrightarrow w_\lambda(x) = a_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}x) + b_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}x)$

$w_\lambda(1) = w_\lambda(-1) \Longrightarrow a_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}) + b_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}) = a_\lambda \cos(-\sqrt{\lambda}) + b_\lambda \sin(-\sqrt{\lambda})$

$\Longrightarrow b_\lambda = 0 \vee \lambda = k^2\pi^2$

$w'_\lambda(1) = w'_\lambda(-1) \Longrightarrow -a_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}) + b_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}) = -a_\lambda \sin(-\sqrt{\lambda}) + b_\lambda \cos(-\sqrt{\lambda})$

$\Longrightarrow a_\lambda = 0 \vee \lambda = k^2\pi^2$

Nichttriviale Lösungen gibt es also nur für $\lambda = k^2\pi^2$. wir haben dann

$$w_k(x) = a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)$$

Für $k = 0$ hat man die Konstante a_0. Der Fall $\lambda = 0$ kann also hier integriert werden.

Zugehörige Zeitanteile

$\dot{v}_k(t) = -k^2\pi^2 v_k(t) \implies v_k(t) = c_k e^{-k^2\pi^2 t}$

Jede Funktion $v_k(t) \cdot w_k(x)$ löst die Dgl und erfüllt die Randbedingungen!

Superposition

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)) e^{-k^2\pi^2 t}$$

löst die Dgl und erfüllt die Randbedingungen!

Zu erfüllen : Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)) = f(x)$$

Setze f 2-periodisch fort und bestimme die Fourierkoffizienten $a_k,\ b_k$ der vollen Fourierreihe von f . Mit diesen Koeffizienten hat man dann die Lösung.

Beispiel:

$f(x) = 1 - x^2 + \sin(\pi x)$

Für $k > 0$ erhält man

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \big(1 - x^2 + \sin(\pi x)\big) \cos(k\pi x) dx \\ &= \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x^2 \cos(k\pi x) dx \\ &= \frac{8}{k^2\pi^2} (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \big(1 - x^2 + \sin(\pi x)\big) \sin(k\pi x) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sin(\pi x) \sin(k\pi x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq 1 \\ 1 & k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \big(1 - x^2 + \sin(\pi x)\big)\, dx = 4/3,$$

$$u(x,t) = \frac{2}{3} + 1 \cdot e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2\pi^2} (-1)^{k+1} \cos(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}$$

Zusammenstellung geschlossener Lösungsformeln (ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Wärmeleitungsgleichung

I) ARWA, homogen, homogene Randwerte

$$\begin{aligned} u_t - cu_{xx} &= 0 \qquad c > 0,\ x \in (a,b),\ t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad x \in [a,b], \\ u(a,t) &= 0 \qquad t > 0, \\ u(b,t) &= 0 \qquad t > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \sin(k\omega(x-a)) \qquad \omega = \frac{\pi}{b-a} \\ a_k &= \frac{2}{b-a} \int_a^b u_0(x) \sin(k\omega(x-a))\, dx \qquad \omega = \frac{\pi}{b-a} \end{aligned}$$

II) ARWA, inhomogen, homogene Randwerte :

$$\begin{aligned} &u_t - cu_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L) \\ &u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{aligned}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\ \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{da_k(t)}{dt} + a_k(t)\,\frac{c^2k^2\pi^2}{L^2} = c_k(t), \quad a_k(0) = b_k$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\ \sin(k\omega x)\, dx$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\ \sin(k\omega x)\, dx$$

Für $c = 1$ gilt nach Vorlesungsskript Struckmeier (bzw. Vorlesung DGL I Hinze) direkt:

$$a_k(t) = b_k exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{L^2}\cdot t\right) + \int_0^t exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{L^2}\cdot(t-s)\right) c_k(s)\, ds$$

III) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$
\begin{aligned}
& u_t - c\tilde{u}_{xx} = f(x,t), \qquad \tilde{\ } x \in (0,L),\ t > 0 \\
& u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L) \\
& u(0,t) = g(t) \qquad u(L,t) = h(t) \qquad t > 0
\end{aligned}
$$

Randwerte homogenisieren

$$
v(x,t) = u(x,t) - g(t) - \frac{x}{L}(h(t) - g(t))
$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogen : Fall I).

Falls neue Dgl. inhomogen : Fall II).

Das war Mathe IV !
Schade, dass es schon vorbei ist.
Das letzte Semester mit Ihnen hat richtig Spaß gemacht.
Viel Erfolg bei den Klausuren und bei Ihrem weiteren Studium.