Department Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2009
Dr. Hanna Peywand Kiani

Anleitung zu Blatt 4 Differentialgleichungen II

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\delta\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \delta\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u \;=\; u_{xx} + u_{yy} \;=\; 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \Omega}$$

Hinweise zur Aufgabe 1) Für harmonische Funktionen gelten das **Maximumprinzip** und die **Mittelwerteigenschaft**:

- Eine in Ω harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.
- Sei u harmonisch im Kreis $B_a(x_0, y_0)$ mit Radius a um (x_0, y_0) und stetig auf dem Rand des Kreises $\delta B_a(x_0, y_0)$ fortsetzbar. Dann gilt

$$\boxed{u(x_0, y_0) \;=\; \frac{1}{2\pi a} \oint_{\delta B_a(x_0,y_0)} u(x,y)ds}$$

Es folgen Produktansätze für die Aufgaben 2 und 3.

Laplacegleichung auf Rechtecken

$$\Delta u = 0 \qquad u \in (0,a) \times (0,b)\,, \qquad u = g \text{ auf Rand } (0,a) \times (0,b)\,.$$

Produktansatz: $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ liefert

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0,$$
$$\Longrightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda$$

Eine der gewöhlichen DGL z.B. $\dfrac{v''(x)}{v(x)} = \lambda$ liefert je nach Vorzeichen von λ folgende Lösungen

$$\begin{aligned} \lambda = 0: &\qquad v_\lambda = A_0 + B_0 x \\ \lambda < 0: &\qquad A_\lambda \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B_\lambda \sin(\sqrt{-\lambda}x) \\ \lambda > 0: &\qquad A_\lambda e^{-\sqrt{\lambda}x} + B_\lambda e^{\sqrt{\lambda}x} \end{aligned}$$

Welche λ in Frage kommen, hängt von den Randdaten ab. Diese liefern die v_λ. Mit den so gewonnenen λ löst man die zweite DGL $w'' = -\lambda w$.

Jede Funktion $u_\lambda = v_\lambda \cdot w_\lambda$ löst die Dgl. und damit löst auch jede Linearkombination $\sum_\lambda v_\lambda \cdot w_\lambda$ die Dgl.

Beispiel A:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \qquad & \text{auf } R := (0,\pi)\times(0,1) \\ u(x,0) = 0\,, \quad u(x,1) = -\pi\sin(x) \qquad & x\in[0,\pi] \\ u(0,y) = 0\,, \quad u(\pi,y) = 0 \qquad & y\in[0,1] \end{aligned}$$

Da u für zwei verschiedene $x-$ Werte Null wird, fangen wir mit der DGL für v an. Die Randwerte liefern für nichttriviale Lösungen

$$u(0,y) = v(0)w(y) = 0 \Longrightarrow v(0) = 0, \quad u(\pi,y) = v(\pi)w(y) = 0 \Longrightarrow v(\pi) = 0$$

Die RWA für v lautet

$$v''(x) = \lambda v(x), \qquad v(0) = v(\pi) = 0$$

Wie bei der Wellengleichung erhalten wir nur für negative λ nichttriviale Lösungen

$$\begin{aligned} v(x) &= A_\lambda\cos(\sqrt{-\lambda}x) \,+\, B_\lambda\sin(\sqrt{-\lambda}x) \\ v(0) &= 0 \Longrightarrow A_\lambda = 0 \quad v(\pi) = 0 \Longrightarrow \lambda = -k^2 \\ v_k(x) &:= \sin(kx),\ \lambda = -k^2\,, \qquad k\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mit diesen $\lambda-$ Werten lösen wir die zweite DGL

$$w''(y) = -\lambda w(y) = k^2 w(y) \Longrightarrow w_k = A_k e^{-ky} \,+\, B_k e^{ky}$$

$$u(x,0) = v(x)\cdot w(0) = 0 \Longrightarrow w(0) = 0 \Longrightarrow B_k = -A_k$$

Superposition:

$$u(x,y) \,=\, \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e^{-ky} \,-\, e^{ky})\sin(kx)$$

Zu erfüllen ist noch $u(x,1) = -\pi\sin(x)$ also

$$u(x,1) \,=\, \sum_{k=1}^{\infty} c_k(e^{-k} \,-\, e^{k})\sin(kx) \,=\, -\pi\sin(x)$$

Im allgemeien Fall ist hier wieder nach den Fourierkoeffizienten der ungeraden, periodischen Fortsetzung der rechten Seite gefragt. Hier können wir ablesen:

$$c_1[e^{-1} - e^1] = -\pi\,, \qquad c_k = 0 \ \text{ für } \ k \neq 1\,.$$

$$u(x,t) = \frac{\pi(e^{-y} \,-\, e^{y})}{e^1 - e^{-1}}\,\sin(x)$$

Was mache ich wenn die Randdaten nicht auf drei Seiten verschwinden? Problem in maximal 4 Teilprobleme zerlegen, bei denen jeweils auf drei Kanten Null vorgegeben ist und auf der vierten die ursprünglichen Randdaten. Teilprobleme lösen und addieren liefert zwar fast das richtige Ergebnis. Nur gibt es in den Ecken Kompatibilitätsprobleme und das Ergebnis stimmt in den Ecken nicht unbedingt.

Beispiel: $\Delta u = 0$ auf $(0,1)\times(0,1)$ mit

$$u(x,0)=0\,,\quad u(x,1)=1-x \qquad x\in[0,1]$$
$$u(0,y)=\sin(\frac{\pi}{2}y)\,,\quad u(1,y)=\ 0 \qquad y\in[0,1]$$

zerlegung in

$$\Delta u_1 = 0 \qquad \text{auf } R:=(0,1)\times(0,1)$$
$$u_1(x,0)=0\,,\quad u_1(x,1)=\ 1-x \qquad x\in[0,1]$$
$$u_1(0,y)=0\,,\quad u_1(1,y)=\ 0 \qquad y\in[0,1]$$

und

$$\Delta u_2 = 0 \qquad \text{auf } R:=(0,1)\times(0,1)$$
$$u_2(x,0)=0\,,\quad u_2(x,1)=\ 0 \qquad x\in[0,1]$$
$$u_2(0,y)=\sin(\frac{\pi}{2}y)\,,\quad u_2(1,y)=\ 0 \qquad y\in[0,1]$$

lösen der Probleme und Addision der Ergebnisse brächte mit $u=u_1+u_2$ auf den ersten Blick das richtige Ergebnis.
Aber: 1) Was ist mit den Randdaten für u_1 bzw. u_2 im Punkt $(0,1)$?
2) Welchen Wert würde u in $(0,1)$ annehmen? Vorgegeben war $u(0,1)=1$.

Ausweg: Wir ziehen zunächst eine bilineare **Eckenfunktion**

$$u_E(x,y)=a+bx+cy+dxy, \qquad u=u_E \text{ in den Ecken}$$

von u ab. $v:=u-u_E$ löst die DGL mit angepassten Daten, die in den Ecken verschwinden.

Beispiel B:

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } R:=(0,\pi)\times(0,1)$$
$$u(x,0)=0\,,\quad u(x,1)=\frac{\pi-x}{\pi}-\pi\sin(x) \qquad x\in[0,\pi]$$
$$u(0,y)=y-\sin(\pi y)\,,\quad u(\pi,y)=\ 0 \qquad y\in[0,1]$$

Schritt 1: Definiere $u_E=a+bx+cy+dxy$ mit

$u_E(0,0)=u(0,0)=0 \implies a=0$

$u_E(0,1)=u(0,1)=\dfrac{\pi-0}{\pi}-\pi\sin(0)=1 \implies c=1$

$u_E(\pi,0)=u(\pi,0)=0 \implies b=0$

$u_E(\pi,1)=u(\pi,1)=0 \implies c+d\pi=0 \implies d=-\frac{1}{\pi}$

Für $v=u-u_E=u-(y-\frac{1}{\pi}xy)$ erhalten wir das System

$$\Delta v = 0 \qquad \text{auf } R:=(0,\pi)\times(0,1)$$
$$v(x,0)=0\,,\quad v(x,1)=\frac{\pi-x}{\pi}-\pi\sin(x)-(1-\frac{1}{\pi}x)=-\pi\sin(x)$$
$$v(0,y)=y-\sin(\pi y)-y=-\sin(\pi y)\,,\quad v(\pi,y)=\ 0-(y-\frac{1}{\pi}\pi y)=0$$

Schritt 2: Zerlegung in

$$\Delta v_1 = 0 \qquad \text{auf } R:=(0,\pi)\times(0,1)$$
$$v_1(x,0)=0\,,\quad v_1(x,1)=\ -\pi\sin(x) \qquad x\in[0,\pi]$$
$$v_1(0,y)=0\,,\quad v_1(\pi,y)=\ 0 \qquad y\in[0,1]$$

und

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= 0 \qquad \text{auf } R := (0,\pi)\times(0,1) \\ v_2(x,0) &= 0\,, \quad v_2(x,1) = 0 \qquad x\in[0,\pi] \\ v_2(0,y) &= -\sin(\pi y)\,, \quad v_2(\pi,y) = 0 \qquad y\in[0,1] \end{aligned}$$

Schritt 3: Lösen der einzelnen Probleme.

Problem 1) haben wir oben gelöst mit dem Ergebnis

$$\boxed{v_1(x,y) = \frac{\pi(e^{-y} - e^{y})}{e^1 - e^{-1}}\sin(x)}$$

Skizze der Lösung von Problem 2)

Produktansatz: $v_2(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ liefert wieder

$$X'' = \lambda X, \quad Y'' = -\lambda Y, Y(0) = Y(1) = X(\pi) = 0$$

Da zwei Randwerte für Y Null sind, fangen wir mit der DGL

$$Y'' = -\lambda Y, Y(0) = Y(1) = 0$$

an und erhalten wie üblich

$$Y_k(y) = a_k\cos(\sqrt{\lambda}y) + b_k\sin(\sqrt{\lambda}y)$$

und die Randdaten liefern $a_k = 0$, $\lambda_k = k^2\pi^2$

$$Y_k(y) = b_k\sin(k\pi y) \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Die zweite DGL lautet

$$X_k''(x) = k^2\pi^2 X(x) \implies X_k(x) = A_k e^{-k\pi x} + B_k e^{k\pi x}$$

$$X_k(\pi) = 0 \implies A_k = -e^{2k\pi^2}\,B_k$$

Superposition:

$$v_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\left(e^{k\pi x} - e^{2k\pi^2}\,e^{-k\pi x}\right)\sin(k\pi y)$$

Zu erfüllen ist noch $v_2(0,y) = -\sin(\pi y)$ also

$$v_2(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\left(1 - e^{2k\pi^2}\right)\sin(k\pi y) = -\sin(\pi y)$$

Die Fourierkoeffizienten der rechten Seite können hier wieder abgelesen werden:

$$B_1(1-e^{2\pi^2}) = -1\,, \qquad B_k = 0 \text{ für } k\neq 1\,.$$

$$\boxed{v_2(x,y) = \frac{e^{2\pi^2}e^{-\pi x} - e^{\pi x}}{1-e^{2\pi^2}}\sin(\pi y)}$$

Die lösung des ursprünglichen Problems ist $\quad u = u_E + v_1 + v_2$
Bemerkung: Die Exponentialterme in den Lösungen können in sinh Terme umgeschrieben werden.

Laplacegleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

Laplace Operator in Polarkoordinaten: $\boxed{\Delta u \,=\, 0 \iff r^2 u_{rr} \,+\, r u_r + u_{\phi\phi} \,=\, 0\,.}$

Ansatz: $\quad u(r,\phi) = \, w(r)\cdot v(\phi)$

Neue Dgl.: $\quad r^2 w'' \cdot v \,+\, r w' \cdot v \,+\, w \cdot v'' \,=\, 0$

Sortieren nach v und w: $\quad v(r^2 w'' \,+\, r w') \,=\, -w \cdot v''$

$$\implies \frac{r^2 w'' \,+\, r w'}{w} \,=\, -\,\frac{v''}{v} \,=\, \lambda\,.$$

System gewöhnlicher Dgl'n:

$$\boxed{v''(\phi) \,=\, -\lambda v(\phi)\,, \qquad r^2 w''(r) \,+\, r w'(r) \,-\, \lambda w = 0}$$

Die Gleichung für v kennen wir mittlerweile. v sollte $2\pi-$ periodisch sein, daher kommen nur die Lösungen für $\lambda > 0$, nämlich

$$a_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}\phi) \,+\, b_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}\phi), \text{ mit } \lambda_k = k^2, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

in Frage. Definiere daher

$$\boxed{v_k(\phi) \,=\, a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi)\,, \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_0(\phi) = a_0}$$

Die passenden w_k müssen die Gleichung

$$r^2 w''(r) \,+\, r w'(r) \,-\, k^2 w = 0$$

erfüllen.

Für $k = 0$ erhalten wir

$$w'' \,=\, -\tfrac{1}{r} w' \implies w' \,=\, \frac{d_0}{r} \implies \boxed{w_0 \,=\, c_0 + d_0 \ln(r)\,.}$$

Für $k \neq 0$ erhalten wir eine Eulersche Dgl, die man mit der Substitution $r = e^t$ auf eine Dgl mit konstanten Koeffizienten zurückführen kann (vgl. Blatt1). Alternativ macht man gleich den Ansatz $w(r) = r^\gamma$ und setzt dies ein:

$$-k^2 \cdot r^\gamma + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} + r^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot r^{\gamma-2} = 0$$

$$\iff r^\gamma \,(-k^2 + \gamma + \gamma^2 - \gamma) = 0 \iff \gamma = \pm k$$

und damit $\quad \boxed{w_k(r) \,=\, c_k r^{-k} \,+\, d_k r^k}$

Jede Funktion der $w_k \cdot v_k$ löst die DGL. Da die Dgl linear ist, ist Jede Lin.Komb. auch eine Lösung

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) \,+\, \sum_k (c_k r^{-k} \,+\, d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi))}$$

Beispiel:

$\Delta u \,=\, 0 \qquad$ für $x^2+y^2>9, \qquad u(x,y) = 1-x^2,$ auf $x^2+y^2=9\,.$

Allgemeine Vorgehensweise auf dem Außenraum $x^2+y^2>R$:

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_k = 0\,, \quad \forall k\,.$

Ansatz : $u(r,\phi) = \dfrac{a_0}{2} \,+\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^{-k}\,(a_k\cos(k\phi) \,+\, b_k\sin(k\phi))$

Randwerte: $u(R,\phi) = u_0(\phi) \qquad$ (hier $u(3,\phi) = 1-(3\cos(\phi))^2$)

$$u(R,\phi) = \frac{a_0}{2} \,+\, \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k}\,(a_k\cos(k\phi) \,+\, b_k\sin(k\phi)) = u_0(\phi)$$

Entwickle u_0 in eine Fourierreihe

$$\begin{aligned} u_0(\phi) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(k\phi) \,+\, B_k\sin(k\phi) \\ A_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\phi)\cos(k\phi)\,d\phi \\ B_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\phi)\sin(k\phi)\,d\phi \end{aligned}$$

Dann muss gelten

$$R^{-k}a_k = A_k \iff a_k = R^k\cdot A_k, \quad \text{und analog } b_k = R^k\cdot B_k$$

und wir erhalten die Lösung

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} \,+\, \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k\,(A_k\cos(k\phi) \,+\, B_k\sin(k\phi))$$

Zurück zum Beispiel :

RWE: für $R=3\,:\, u(3,\phi) = 1-9\cos^2(\phi) \;=\; 1-\frac{9}{2}\,(\cos(2\phi)+1)$

Die Fourierkoeffizienten von u_0 sind

$\frac{A_0}{2} = 1-\frac{9}{2} = \,-\frac{7}{2}\,, \quad A_2 = -\frac{9}{2}\,, \quad A_K = B_k = 0$ sonst.

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(r,\phi) \,=\, -\frac{7}{2} \,-\, \frac{9}{2}\left(\frac{3}{r}\right)^2 \cos(2\phi)\,.$$

Lösung in kartesischen Koordinaten :

nutze $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi)-\sin^2(\phi) = \dfrac{x^2}{r^2} - \dfrac{y^2}{r^2}$

$$u(x,y) \,=\, -\frac{7}{2} \,-\, \frac{81}{2(x^2+y^2)}\,\cdot\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,.$$

Zusammenfassung

Allgemeiner Ansatz bei Außen–/Innenraum eines Kreises, bei Ringen, bei Kreis-/ Ringsegmenten

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0\ln(r) \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}(c_k r^{-k} \;+\; d_k r^k)(a_k\cos(k\phi) \;+\; b_k\sin(k\phi))}$$

Um beschränkte Lösungen zu erhalten setzt man

- im **Innenraum** mit RWE $u(R,\phi) = u_0(\phi)$
  $c_k = 0$ und $d_0 = 0$ und erhält:
  $$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k (A_k\cos(k\phi) \;+\; B_k\sin(k\phi))$$
- im **Außenraum** mit RWE $u(R,\phi) = u_0(\phi)$
  $d_k = 0$ und:
  $$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k\cos(k\phi) \;+\; B_k\sin(k\phi))$$
- im **Ring** mit RWE $u(R_1,\phi) = u_1(\phi), \quad u(R_2,\phi) = u_2$
  volle Ansatzfunktion, Koeffizienten über die zwei Randbedingungen bestimmen!

Übungsaufgabe: Rechtzeitig Randwerte in Ansatz $w(r)\cdot v(\phi)$ einsetzen. Es ergeben sich etwas andere Ansatzfunktionen für v und damit andere λ und w.

Hinweise zur Aufgabe 4:

- Machen Sie wie gewohnt einen Produktansatz
- Lösen Sie erst die gewöhnliche Dgl für die Raumvariable
- Machen Sie sich klar welches Vorzeichen die Eigenwerte haben müssen, damit die Lösung beschränkt bleibt.
- Zeigen Sie, dass es keine zeitlich periodischen Eigenfunktionen gibt
- Örtliche Dämpfung könnte z.B. mit e^{-ax} erreicht werden
- linear ortsabhängige Phasenverschiebung: cos oder sin Funktion mit
  Argument $(\alpha t - \beta x)$.