Department Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2009

Dr. Hanna Peywand Kiani

Laplace Transformation

Laplace Transformation

Ziel: Führe die Lösung von Anfangswertaufgaben auf die Lösung algebraischer Gleichungen zurück.

Originalfunktionen: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt Originalfunktion, wenn

f und die Ableitungen von f bis auf Sprungstellen stetig sind, wobei in jedem endlichen Intervall höchstens endlich viele Sprungstellen auftauchen,

$|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t \geq 0$: Wachstumskoeffizient σ

$f(t) = 0 \quad \forall t < 0\,.$

Vorgehen:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Problem im Originalraum} & \xrightarrow[\text{Laplace Transf.}]{} & \text{Problem im Bildraum} \\
 & & \downarrow \\
 & & \downarrow \\
 & \text{Rücktransf.} & \downarrow \\
\text{Lösung im Originalraum} & \longleftarrow & \text{Lösung im Bildraum} \\
y & \longleftarrow & Y
\end{array}$$

Laplace Transformation:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \; =: F(s) \quad \text{für } \Re(s) > \sigma$$

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet F \qquad \text{heißt } \textbf{Korrespondenz}$$

Anwendung auf Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{ccc}
\text{DGL} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \text{algebr. Gleichung} \\
 & & \downarrow \text{ lösen} \\
y = \text{Lösung der DGL} & \circ\!\!-\!\!\bullet & Y
\end{array}$$

Beim gewöhnlichen Integrieren ist man darauf angewiesen möglichst viele elementare Integrale zu kennen bzw. nachschlagen zu können. Bei der Laplace Transformation muss man viele Korrespondenzen kennen bzw. gute Tabellen haben. Die Tabellen beziehen sich immer auf Originalfunktionen. D.h. $f(t) = 0, \forall t < 0\,.$

f	F	σ
1 d.h. $h_0(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$h_a(t)$	$e^{-as}\frac{1}{s}$	0
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	$\Re(a)$
$\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\delta(t)$	1	0

einige Rechenregeln: Es seien $f \circ\!\!-\!\!\bullet F$, $g \circ\!\!-\!\!\bullet G$ sowie $h_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$. Dann gilt

$I)$	$\alpha f + \beta g$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\alpha F + \beta G$	Linearität
$II)$	$f(\alpha t)$ $\alpha > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	Streckung im O–Raum
$III)$	$h_a(t) f(t-a)$ $a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-sa} F(s)$	Verschiebung im O–Raum
$IV)$	$e^{at} f(t)$ $a \in \mathbb{C}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s-a)$	Verschiebung im Bildraum/ Mult. mit exp-Fkt im O–Raum
$V)$	$f^{(n)}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) -$ $s^{n-2} f'(0) - \cdots - s^0 f^{(n-1)}(0)$	Ableitungen im O-Raum
$VI)$	$(-t)^n f(t)$ $n \in \mathbb{N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F^{(n)}(s)$	Ableitungen im Bildraum Mult. mit t^n im O–Raum
$VII)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{F(s)}{s}$	Integration im O–Raum
$VIII)$	$\frac{f(t)}{t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\int_s^\infty f(\mu) d\mu$	Integration im Bildraum

Für die Lösung unserer Differentialgleichungen wichtig:

Gesucht Lösung y . Wir nehmen an, dass y eine Originalfunktion ist und nennen die Laplacetransformierte Y . Es gilt also $y \circ\!\!-\!\!\bullet Y$. Dann ist

$y' \circ\!\!-\!\!\bullet sY - y(0)$

$y'' \circ\!\!-\!\!\bullet s^2Y - sy(0) - y'(0)$

$y''' \circ\!\!-\!\!\bullet s^3Y - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$

Beispiel 1 : (Klausur 2003, Str./Ki)

Lösen Sie die AWA

$y'' - y' - 6y = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$

mit Hilfe der Laplace Transformation.

Wir bezeichnen mit $Y(s)$ die Bildfunktion der noch unbekannten Lösung $y(t)$. **Schritt 1) Laplacetransformation der einzelnen Terme der AWA :**

$$y' \circ\!\!-\!\!\bullet sY - y(0) \;=\; sY - 0$$

$$y'' \circ\!\!-\!\!\bullet s(sY - 0) - y'(0) = s2Y - 1$$

$$e^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+2)}$$

Transformation der AWA ergibt also

$$s^2Y - 1 - sY - 6Y = \frac{1}{(s+2)} \Longleftrightarrow \left(s^2 - s - 6\right) Y = \frac{s+3}{(s+2)}$$

Schritt 2) Lösung der algebraischen Gleichung :

$$(s-3)(s+2)Y = \frac{s+3}{(s+2)} \Longleftrightarrow Y(s) = \frac{s+3}{(s-3)(s+2)^2}$$

Schritt 3) Rücktransformation :

bekannt ist : $\dfrac{1}{(s-a)^{n+1}} \bullet\!\!-\!\!\circ e^{at}\dfrac{t^n}{n!}$

also machen wir eine PBZ:

$\dfrac{s+3}{(s-3)(s+2)^2} = \dfrac{a}{s-3} + \dfrac{b}{(s+2)^2} + \dfrac{c}{s+2}$

$\Longleftrightarrow s + 3 = a(s+2)^2 + b(s-3) + c(s-3)(s+2)$

$\Longleftrightarrow a = -c = 6/25\,, \quad b = -5/25$

$\Longleftrightarrow Y(s) = \dfrac{1}{25}\left(\dfrac{6}{s-3} - \dfrac{5}{(s+2)^2} - \dfrac{6}{s+2}\right)$

Damit erhält man

$$y(t) = \frac{1}{25}(6e^{3t} - 6e^{-2t} - 5te^{-2t})$$

Beispiel 2 : Zu Lösen sei die AWA:

$y'' + 9y = h_1(t) - h_2(t) \qquad y(0) = y'(0) = 0$

Schritt 1) Laplacetransformation der AWA :

$$s^2Y + 9Y = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}$$

Schritt 2) Lösung der algebraischen Gleichung :

$$Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(s^2+9)}$$

Schritt 3) Rücktransformation :

Der Ansatz

$$\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2+9}$$

liefert

$$Y(s) = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{9}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\right)$$

und damit wegen

$$\frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\, h_0(t),\ \ \frac{s}{s^2+9} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \cos(3t)$$

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{1}{9}\big(&h_0(t-1)\big[1-\cos(3(t-1))\big] \\ &- h_0(t-2)\ \big[1+\cos(3(t-2))\big]\big) \end{aligned}$$

.

Beispiel 3 : Zu Lösen sei das System:

$$\begin{aligned} u'' - 2(v-u) &= 1 \qquad & u(0) &= v(0) = 0 \\ v'' + 2(v-u) &= 0 \qquad & u'(0) &= v'(0) = 1 \end{aligned}$$

Schritt 1) Laplacetransformation der AWA :

$$\begin{aligned} s^2U - 1 - 2V + 2U &= \frac{1}{s} \\ s^2V - 1 + 2V - 2U &= 0 \end{aligned}$$

Schritt 2) Lösung der algebraischen Gleichung :

$$s^2U + s^2V = 2 + \frac{1}{s} \iff U = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3} - V$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} &(s^2+2)V - \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s^3} + 2V = 1 \\ &\iff V = \frac{1}{s^2+4} + \frac{4}{s^2(s^2+4)} + \frac{2}{s^3(s^2+4)} \end{aligned}$$

Der Ansatz

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s^3} + \frac{k+ds}{s^2+4} = \frac{2+4s}{s^3(s^2+4)}$$

liefert $a = -\frac{1}{8},\ b = 1,\ c = \frac{1}{2},\ k = -1,\ d = \frac{1}{8}$.

Schritt 3) Rücktransformation :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^3} + \frac{1}{8}\cdot\frac{s-8}{s^2+4} \\ &\bullet\!\!-\!\!\circ\ -\frac{1}{8} + t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}\cos(2t) = v(t) \\ U &= \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3} - V \ \bullet\!\!-\!\!\circ\ 2t + \frac{t^2}{2} - v \\ &= t - \frac{1}{8}\cos(2t) + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8} = u(t) \end{aligned}$$

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Laplace Transformierten der folgenden Originalfunktionen

$$f(t) := 5e^{-2t}, \qquad g(t) := t^2 \sin(3t),$$

$$h(t) := \sinh(t)\cos(\alpha t), \qquad k(t) := \begin{cases} t+1 & 0 \le t < 1 \\ 3t-1 & 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Bildfunktionen der Laplace Transformation

$$G(s) := \frac{s+1}{(s^2+2s+10)^2}, \qquad F(s) := \frac{5s^2 - 13s + 21}{(s-2)(s^2-2s+5)}\,.$$

Aufgabe 3: Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Laplace Transformation.

$$y'' + 2y' - 3y = e^t + 2e^{-3t} \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Aufgabe 4:
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme mit Hilfe der Laplace Transformation

a)

$$\begin{aligned} x' &= y & x(0) &= 0\,, \\ y' &= -x + t & y(0) &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u'' - 2(v-u) &= 1 & u(0) &= v(0) = 0 \\ v'' + 2(v-u) &= 0 & u'(0) &= v'(0) = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Ermittlen Sie die Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x + u &= 0, & x, t &\ge 0 \\ u(x,0) &= 0 & (x &\ge 0) \\ u(0,t) &= t^2 & (t &\ge 0) \end{aligned}$$

mittels Laplace–Transformation bzgl. der Variablen t. Bei der Transformation ist x als Parameter aufzufassen. Im Bildraum ist eine Anfangswertaufgabe bzgl. einer gewöhnlichen Differentialgleichung in x zu lösen.