Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 10/11
18.01.2011

Anleitung zu Blatt 6 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Randwertaufgaben, Variationsrechnung

Randwertaufgaben:

A) Lineare Systeme

Gesucht: $\boldsymbol{y} \ : \ [a,b] \ \to \ \mathbb{R}^n$ mit

$$\boldsymbol{y}'(t) \ = \ L[y](t) \ = \ A(t)\boldsymbol{y}(t) \ + \ \boldsymbol{h}(t) \qquad t \in]a,b[$$

$$R_j[y] \ = \ \sum_{k=1}^{n} (\, a_{jk}y_k(a) \ + \ b_{jk}y_k(b)\,) \ = \ d_j \qquad j = 1,2,\cdots,n\,.$$

Andere Schreibweise der Randbedingungen: mit geeigneten Matrizen $\boldsymbol{B}_a$, $\boldsymbol{B}_b$

$$\boldsymbol{B}_a\, \boldsymbol{y}(a) \ + \ \boldsymbol{B}_b\, y(b) \ = \ \boldsymbol{d}$$

Fundamentalsystem homogene Aufgabe: $\boldsymbol{y}^{[1]},\ \boldsymbol{y}^{[2]},\ \cdots,\ \boldsymbol{y}^{[n]}$.

Partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe : $\boldsymbol{y}_p$.

Allgemeine Lösung: $\displaystyle \boldsymbol{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \boldsymbol{y}^{[k]} \ + \ \boldsymbol{y}_p.$

Einsetzen in Randbedingungen $\longrightarrow$ lineares System für die c_k:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\, R_j[\,\boldsymbol{y}^{[k]}] \ = \ d_j \ - \ R_j[\,\boldsymbol{y}_p] \qquad j = 1, \cdots n$$

eindeutig lösbar genau dann, wenn

$$D := \det R \ = \det \begin{pmatrix} R_1[y^{[1]}] & R_1[y^{[2]}] & \cdots & R_1[y^{[n]}] \\ R_2[y^{[1]}] & R_2[y^{[2]}] & \cdots & R_2[y^{[n]}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R_n[y^{[1]}] & R_n[y^{[2]}] & \cdots & R_n[y^{[n]}] \end{pmatrix} \ \neq \ 0$$

Alternativ: Ist $\boldsymbol{Y}(t)$ eine Fundamentalmatrix, so ist die RWA genau dann eindeutig lösbar, wenn die **Shooting-Matrix** $\boldsymbol{S}$ regulär ist, wobei

$$\boldsymbol{S} \ := \ \boldsymbol{B}_a\,\boldsymbol{Y}(t_a) \ + \ \boldsymbol{B}_b\,\boldsymbol{Y}(t_b)$$

Beachten Sie:
Eindeutige Lösbarkeit ist unabhängig von den Inhomogenitäten $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{y}_p$.

Beispiel 1) [Klausur 2005, Prof. Oberle/Kiani]

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1'(t) & = & -2x_1(t) & + & 3x_2(t) & + & 8t & + & 3 \\ x_2'(t) & = & 10x_1(t) & - & 3x_2(t) & - & 16t & - & 6 \end{array}$$

$$2x_1(0) + x_2(0) \ = \ \alpha, \quad x_1(1) - x_2(1) \ = \ \beta\,, \qquad \alpha,\beta \ \in \ \mathbb{R}\,.$$

a) Formulieren Sie die Randwertaufgabe in Matrixschreibweise.
b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Dgl.systems.
c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Dgl.systems mit Hilfe des Ansatzes

$$x(t) = (\,at + b\,,\ ct + d)^T \qquad a,\ b,\ c,\ d \ \in \mathbb{R}.$$

d) Zeigen Sie, dass die Randwertaufgabe für beliebige $\alpha,\beta \ \in \ \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

Lösung:

a) $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$

$$\text{mit} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -16t-6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{B}_0\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}_1\,\mathbf{x}(1) = \mathbf{d}$$

mit

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

b) Lösung des homogenen Systems:

$$\det(\,\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E}\,) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 10 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 30 = \lambda^2 + 5\lambda - 24 = (\lambda+8)(\lambda-3) = 0\ .$$

$$\underline{\lambda = -8:} \qquad \begin{pmatrix} -2+8 & 3 \\ 10 & -3+8 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow 2v_1 = -v_2 \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 3:} \qquad \begin{pmatrix} -2-3 & 3 \\ 10 & -3-3 \end{pmatrix}\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow 5w_1 = 3w_2 \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Homogene Lösung:

$$\mathbf{x}_h(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^{-8t} \\ 5e^{3t} & -2e^{-8t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

c) Lösung über speziellem Ansatz:

Setzt man den Ansatz $\boldsymbol{x}_p(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$ in das System ein, so folgt:

$$\begin{aligned} a &= -2at - 2b + 3ct + 3d + 8t + 3 \\ c &= 10at + 10b - 3ct - 3d - 16t - 6 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} a &= -2b + 3d + 3 \quad , \qquad & 2a &= 3c + 8 \\ c &= 10b - 3d - 6 \quad , \qquad & 10a &= 3c + 16 \end{aligned}$$

liefert

$$8a = 8 \Longleftrightarrow a = 1 \Longrightarrow c = -2$$
$$2b = 3d + 2$$
$$10b = 3d + 4 \Longleftrightarrow 8b = 2 \Longrightarrow b = \frac{1}{4} \Longrightarrow d = -\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{4} \\ -2t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Alternativ : Variation der Konstanten

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) \qquad \text{“Variation der Konstanten”}$$

$$\mathbf{X}(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{h}(t) \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^{-8t} \\ 5e^{3t} & -2e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} I \ : \ 3e^{3t}c_1'(t) + e^{-8t}c_2'(t) &= 8t+3 \\ II \ : \ 5e^{3t}c_1'(t) - 2e^{-8t}c_2'(t) &= -16t-6 \\ 2I + II \ : \qquad 11e^{3t}c_1'(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1'(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_1(t) = konst.$$

$$\Rightarrow e^{-8t}c_2'(t) = 8t+3 \qquad \Rightarrow c_2'(t) = (8t+3)e^{8t} \qquad \Rightarrow$$

$$c_2(t) = \int (8t+3)e^{8t} = \int 8te^{8t} + \int 3e^{8t} = te^{8t} - \int e^{8t} + 3\int e^{8t} = (t + \frac{1}{4})e^{8t}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^{-8t} \\ 5e^{3t} & -2e^{-8t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (t+\frac{1}{4})e^{8t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{4} \\ -2t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) Oben hatten wir die Fundamentalmatrix $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{3t} & e^{-8t} \\ 5e^{3t} & -2e^{-8t} \end{pmatrix}$. damit erhalten wir die Shooting-Matrix

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &:= \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{X}(0) + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{X}(1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e^3 & e^{-8} \\ 5e^3 & -2e^{-8} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2e^3 & 3e^{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -2e^3 & 3e^{-8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{S}$ ist regulär. Das Randwertproblem ist für beliebige rechte Seiten eindeutig lösbar.

B) Lineare Differentialgleichung 2.Ordnung

Gesucht: $y \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$D[y] \,=\, y'' \,+\, a_1(t)y' \,+\, a_0(t)y \,=\, h(t) \qquad t \in]a,b[$$

$$R_j[y] \,=\, \alpha_j y(a) \,+\, \beta_j y'(a) \,+\, \gamma_j y(b) \,+\, \delta_j y'(b) \,=\, d_j \qquad j = 1,2\,.$$

Fundamentalsystem homogene Aufgabe: $y_1,\, y_2\,.$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe : $y_p\,.$

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1\, y_1(t) \,+\, c_2\, y_2(t) \,+\, y_p(t)\,.$

Einsetzen in Randbedingungen $\longrightarrow$ lineares System für $c_1,\, c_2$:

$$c_1\, R_1[y_1] \,+\, c_2\, R_1[y_2] \,=\, d_1 \,-\, R_1[y_p]$$

$$c_1\, R_2[y_1] \,+\, c_2\, R_2[y_2] \,=\, d_2 \,-\, R_2[y_p]$$

eindeutig lösbar genau dann, wenn

$$D := \det R \,= \det \begin{pmatrix} R_1[y_1] & R_1[y_2] \\ R_2[y_1] & R_2[y_2] \end{pmatrix} \,\neq\, 0$$

Beachten Sie: Eindeutige Lösbarkeit ist wieder unabhängig von den Inhomogenitäten $h, d, y_p\,.$

Matrixschreibweise:

$$\boldsymbol{y}\,(t) \,=\, \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}\,'(t) \,=\, \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \,+\, \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Randbedingungen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{pmatrix} \,+\, \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2)

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y &= f(x) \\ \alpha y(1) - \beta y'(1) = \gamma_1 \qquad & y(2) - y'(2) = \gamma_2 \end{aligned}$$

mit einer auf [1,2] stetigen Funktion f und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $y^{[1]}(x), y^{[2]}(x)$ für die zugehörige homogene Differentialgleichung $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$, mit Hilfe des Ansatzes $y^{[1]}(x) = x^k$ und anschließendem Reduktionsansatz $y^{[2]}(x) = w(x)y^{[1]}(x)$.

b) Zeigen Sie, dass die gefundenen Lösungen ein Fundamentalsystem bilden.

c) Untersuchen Sie, für welche α und β die Aufgabe für alle γ_1, γ_2 und jede stetige rechte Seite f eindeutig lösbar ist.

d) Lösen Sie die Aufgabe aus a) für konkrete α, $\beta, \gamma_1, \gamma_2$ und $f(x)$.

Lösung :

a) Einsetzen des Ansatzes in die Dgl. ergibt

$$x^k(\,k(k-1) - 3k + 4) = \; 0\,\forall x \in [1,2] \iff k^2 - 4k + 4 = 0 \iff k = 2\,.$$

Wir wählen also $y^{[1]}(x) = x^2$ und setzen $y^{[2]}(x) = x^2 \cdot w(x)$.
Einsetzen von $y^{[2]}$ in die Dgl. ergibt:

$$x^2w'' + 4xw' + 2w - (6w + 3x \cdot w') + 4 \cdot w = 0 \iff x(x \cdot w'' + w') = 0$$

Setzt man $z(x) = w'(x)$, so erhält man für $z(x)$:

$$xz' + z = 0 \iff \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \iff z(x) = \frac{c}{x}\,.$$

Wir können daher $w'(x) = z(x) = \frac{1}{x}$ und $w(x) = \ln(x)$ wählen.
Die Funktionen

$$y^{[1]}(x) = x^2\,, \qquad y^{[2]}(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

b) Die zugehörigen Lösungen des äquivalenten Systems sind die Spalten der Matrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y^{[1]}(x) & y^{[2]}(x) \\ (y^{[1]})'(x) & (y^{[2]})'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x^2\ln(x) \\ 2x & 2x\ln(x) + x \end{pmatrix}$$

Für die Wronski-Determinante gilt z. B. für $x = 1$

$$W(1) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Die beiden Lösungen bilden ein Fundamentalsystem.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
R_1(y^{[1]}) &= \alpha y^{[1]}(1) - \beta(y^{[1]})'(1) = \alpha - 2\beta\,,\\
R_1(y^{[2]}) &= \alpha y^{[2]}(1) - \beta(y^{[2]})'(1) = 0 - \beta\,,\\
R_2(y^{[1]}) &= y^{[1]}(2) - (y^{[1]})'(2) = 4 - 4 = 0\,,\\
R_2(y^{[2]}) &= y^{[2]}(2) - (y^{[2]})'(2) = 4\ln(2) - (4\ln(2) - 2) = -2\,.
\end{aligned}$$

Die RWA ist genau dann für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, f(x)$ eindeutig lösbar, wenn die Matrix

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta & -\beta \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

regulär ist. Also genau dann, wenn

$$-2\alpha + 4\beta \neq 0 \iff \alpha \neq 2\beta.$$

d) Zur konkreten Berechnung schreibt man die Gleichung in Matrixschreibweise

- Löse nach y'' auf: $y'' = \dfrac{3}{x}\,y' - \dfrac{4}{x^2}\,y + f(x)\,.$
- Führe ein $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

  Dann ist $y_1' = y' = y_2, \qquad y_2' = y'' = \dfrac{3}{x}\,y_2 - \dfrac{4}{x^2}\,y_1 + f(x)$

  Das System lautet

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{x^2} & \frac{3}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

  Variation der Konstanten, spezieller Ansatz oder Greensche Funktion liefern die Lösung, wobei man die Matrixschreibweise für die ersten beiden Methoden benötigt.

Ansatz bei Variation der Konstanten: $\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{c}' =$ Inhomognität!

Variationsrechnung

Problem: Bestimme $y \in C^1[a,b]$ so, dass

$$\boxed{I[y] := \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt \;=\; \text{min!}}$$

unter den **Rand-/Nebenbedingungen**:

$$y(a) = y_a, \qquad \text{und/oder} \qquad y(b) = y_b\ .$$

natürliche Randbedingungen:

Falls keine Randbedingung in a: fordere $f_{y'}(a) \;=\; 0$.

Falls keine Randbedingung in b: fordere $f_{y'}(b) \;=\; 0$.

Notwendige Bedingung für ein lokales Minimum:
Euler-Lagrange-Gleichung

$$\boxed{f_y(t, y_0(t), y_0'(t)) \;-\; \frac{d}{dt}\, f_{y'}(t, y_0(t), y_0'(t)) \;=\; 0}$$

Bei **Autonomen Systemen**: f nicht explizit abhängig von t. Also $f(y(t), y'(t))$.

Notwendige Bedingung für lokales Minimum: Hamilton-Funktion = Konstante

$$\boxed{H = f \;-\; y' \cdot f_{y'} \;=\; C}$$

Nachweis der Minimalität:
Gelegentlich durch direkten Vergleich von $I[y_0]$ und $I[y_0 + \epsilon z]$ möglich.

Interessant sind nur zulässige Funktionen $y_0 + \epsilon z$.

Falls RB $y(a) = y_a$ vorhanden ist, muss gelten:
$y(a) = \; y_0(a) + \epsilon\, z(a) = \; y_a \iff z(a) = 0$

Analog muss ggf. gelten $z(b) = \; 0$

bzw. bei vorhandener(n) natürlichen Randbedingung(en)

$f_{z'}(a) \;=\; 0$ und/oder $f_{z'}(b) \;=\; 0$.

$\epsilon \;\mapsto \qquad h(\epsilon) := I[y_0 + \epsilon z]$ hat ein Minimum bei $\epsilon = 0$.

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d}{d\epsilon}\, I[y_0 + \epsilon z]_{\epsilon=0} \;=\; 0$$

So leitet man übrigens auch die Euler-Lagrange-Gleichung her. Wir nutzen dies zum Nachweis der Optimalität. Siehe Beispiel.

Beispiel) [Klausur 04/05, Prof. Oberle]

Gegeben ist die Variationsaufgabe :

$$I[y] = \int_0^1 (\,t^2 + 4y^2 + (y')^2)\; dt = \text{ min! }, \qquad y(0) = 1\,.$$

a) Stellen Sie die Euler–Lagrange Gleichung des Variationsproblems auf und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Lösen Sie die sich aus a) ergebende Randwertaufgabe.

c) Zeigen Sie, dass die Lösung aus b) zugleich die Variationsaufgabe löst.

Lösung:

a) $I(y) = \int_0^1 f(t,y,y')\, dt \qquad f(t,y,y') = t^2 + 4y^2 + y'^2$

$f_y = 8y \qquad f_{y'} = 2y'$

Euler-Lagrange Dgln. $\quad 0 = f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = \ldots$

Natürl. Randbed. $\quad f_{y'}[1] = 2y'(1) = 0 \Longrightarrow y'(1) = 0$

b) Randwertproblem:

$$\begin{aligned} &y'' - 4y = 0 \\ &y(0) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{aligned}$$

Allg. Lösung $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$

$$\left.\begin{array}{rcl} y(0) &=& C_1 + C_2 &=& 1 \\ y'(1) &=& 2(C_1 e^2 - C_2 e^{-2}) &=& 0 \end{array}\right\} \quad C_1 = \frac{e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}, \quad C_2 = \frac{e^2}{e^2 + e^{-2}}$$

$$y(t) = \frac{e^{2(t-1)} + e^{-2(t-1)}}{e^2 + e^{-2}} = \frac{\cos h(2(t-1))}{\cos h(2)}$$

c) Ist $y = y_0 + \epsilon u$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$ Vergleichskurve, so folgt:

$$\begin{aligned} I(y_0 + \epsilon u) &= \int_0^1 \left[t^2 + 4(y_0 + \epsilon u)^2 + (y_0' + \epsilon u')^2 \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\, (t^2 + 4y_0^2 + y_0'^2) \; + \; \epsilon(8y_0 u + 2y_0' u') \; + \epsilon^2 (4u^2 + u'^2) \,\right] dt \end{aligned}$$

Der Term mit ϵ verschwindet da für $\epsilon = 0$ ein Minimum vorliegt.

Das kann man auch direkt nachrechnen:

$$
\begin{aligned}
I(y_0+\epsilon u) &= \int\limits_0^1 \left[t^2 + 4(y_0+\epsilon u)^2 + (y_0' + \epsilon u')^2\right]\, dt \\
&= I[y] + \int\limits_0^1 (8\epsilon y_0 u + 2\epsilon y_0' u')\, dt + \int\limits_0^1 (4\epsilon^2 u^2 + \epsilon^2 u'^2)\, dt \\
&\geq I[y] + \int\limits_0^1 8\epsilon y_0\, u\, dt + 2\epsilon y_0' u\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 2\epsilon\, y_0'' u\, dt = \\
&= I[y] - 2\epsilon(y_0'(1)u(1) - y_0'(0)u(0)) + 2\epsilon \int\limits_0^1 u(4y_0 - y_0'')\, dt. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Beispiel zur Hamilton-Funktion:

$$I(y) = \int_0^1 y^2 + (y')^2 - y\, y'\, dt \quad \text{min!} \qquad y(0) = 1$$

$f_{y'} =$

Natürliche Randbedingung: $f_{y'}(1) =$

$$H = f - y' \cdot f_{y'} = y^2 + (y')^2 - y\, y' - 2(y')^2 + y\, y' = C$$

$$(y')^2 = y^2 - C \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = y' = \pm\sqrt{y^2 - C}$$

Dies ist eine separierbare DGL

$$\int \frac{dy}{\pm\sqrt{y^2 - C}} = \int dt \Longrightarrow \pm \ \operatorname{arcosh} \frac{y}{C} = t + k$$