Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2012/2013
Dr. Hanna Peywand Kiani

# Anleitung zu Blatt 1 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Elementare Lösungsmethoden für explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung

# Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bisher : algebraische Gleichungen $\longrightarrow$ Lösungen : Zahlen/Vektoren

Jetzt : Differentialgleichungen $\longrightarrow$ Lösungen: Funktionen

Gesucht : **Funktion** $y : D \to \mathbb{R}$, $\quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\dot{y}(t) = f\,(t,\, y(t))}$$

$y(t) = k e^{\alpha t}$

$y'(t) = \alpha y(t)$

**Beispiel:** DGL. $\quad \dot{y}(t) = \frac{1}{t}\,y(t) + t \qquad t \geq 1$

Jede Funktion $\quad y(t) = ct + t^2$, $c \in \mathbb{R}$ erfüllt die DGL

$\dot{y}(t) = c + 2t$

$\frac{1}{t}\,y(t) + t = c + t + t$

$\Longrightarrow$ **i.d.R. unendlich viele Lösungen!**

$\Longrightarrow$ **Anfangs- oder Randwerte nötig (AWe/RWe)**

Physikalisch klar: Geschwindigkeit bekannt $\longrightarrow$ Ort?

- DGL'n oft nur numerisch lösber

- spezielle Typen auch analytisch lösbar

## Separierbare DGL/Trennung der Variablen

$$\boxed{y'(t) = f(t) \cdot g(y(t)) = f(t) \cdot g(y)}$$

$1.\ y' = \frac{dy}{dt} = f(t)\, g(y)$

$dy$

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\, dt$

Falls $g(y) \neq 0$:

$$\frac{1}{g(y(t))} y'(t) = f(t) \Longrightarrow \int \frac{1}{g(y(t))} y'(t)\, dt = \int f(t)\, dt$$

Substitution $Y := y(t)$, $\quad dY/dt = y'(t)$, $\quad dY = y'(t)dt$ liefert

$$\int \frac{1}{g(Y)}\, dY = \int f(t)\, dt$$

Übliche Kurzschreibweise

$$\boxed{y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \Longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt}$$

**Beispiel A)** $u'(t) = \frac{1}{t}(1 - 2u(t)) \Leftarrow\!\!\!\Rightarrow$ $\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}\underbrace{(1-2u)}$

$$\frac{du}{1-2u} = \frac{dt}{t} \implies \int \frac{du}{1-2u} = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\iff \frac{\ln|1-2u|}{\cancel{-2}} = \left(\ln|t| + \underline{\tilde{C}}\right)(-2)$$

$z = 1-2u$

$\frac{dz}{du} = -2$

$du = \frac{dz}{-2}$

$$\iff e^{\ln|1-2u|} = e^{-2\ln|t| + \hat{C}}$$

$$\iff |1-2u| = e^{-\ln|t|\cdot 2}\cdot e^{\hat{C}} = \underline{C}\,\underline{e^{-\ln|t|\cdot 2}} \quad C \in \mathbb{R}^+$$

$$= \frac{C}{\underline{e}^{\ln|t|\cdot 2}} = \frac{C}{t^2}$$

$$\iff \underline{1-2u} = \frac{k}{t^2} \implies u(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{k}{t^2}\right] \quad \underline{k \in \mathbb{R}}\,.$$

$k = 0$

$u \equiv 1/2$

Probe:

## Transformation auf separierbere DGL

Bestimmte Typen können auf separierbare DGL transformiert werden, z.B. $y' = f(\frac{y}{x})$ (siehe Vorlesung), oder $y' = f(ax + by + c)$.

## Beispiel B)

$$y'(x) = 1 + \frac{2}{x - y + 4}, \qquad \text{für } x - y + 4 > 0\,,\ y(0) = 1$$

Substitution : $z = x - y + 4$ liefert

$$\underbrace{z(x) = x - y(x) + 4}$$

$$z' = 1 - y' = 1 - 1 - \frac{2}{z}$$

$$z'(x) = 1 - y'(x)$$

$$y' = 1 - z'$$

$$1 - z' = 1 + \frac{2}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{z} \qquad \text{eine separierbare Dgl.}$$

$$z' = -\frac{2}{z} = -2 \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{z} \Longrightarrow \int z \cdot dz = \int -2 \cdot dx$$

$z^2 = -4x + 2\tilde{c}$ $\quad \tilde{\tilde{c}}$

$$\int z\,dz = -\int 2dx \Longrightarrow \frac{z^2}{2} = -2x + \tilde{c} \Longrightarrow z(x) = \pm\sqrt{c - 4x}\,.$$

Die Lösung ist natürlich nur für $c - 4x > 0$ definiert. Rücktransformation ergibt die allgemeine Lösung

$z = x - y + 4$

$$y(x) = x + 4 \mp \sqrt{c - 4x}\,.$$

$y = x + 4 - z$

Der Anfangswert $y(0) = 1$ liefert

$y(0) = 0 + 4 \mp \sqrt{c} \stackrel{!}{=} 1$

$$1 = y(0) = 0 + 4 \mp \sqrt{c - 0} \Longrightarrow c = 9,\ y(x) = x + 4 - \sqrt{9 - 4x}$$

**Lineare DGL 1.Ordnung** $\boxed{y'(t) + a(t)y(t) = h(t)}$

$ax+b$

$y' = -ay+h$

Zugehörige **homogenen** DGL : $y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0$

**Inhomogenität :** $h(t)$ enthält kein y

$y'(t) = -a(t) \cdot y(t) = \frac{dy}{dt}$

- Bestimme allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$-a(t)dt = \frac{dy}{y}$

$$\frac{dy}{dt} = -a(t)y(t) \Longleftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(t)dt$$
$$\Longleftrightarrow \ln|y| = -\int a(t)dt \longrightarrow cy_h.$$

- Bestimme eine (spezielle/partikuläre) Lsg. $y_p$ der inhom.Aufg.

- Setze zusammen zur allgemeinen Lösung der inhomog. Aufg.

$$\boxed{y(t) = c \cdot y_h(t) + y_p(t) \qquad c \in \mathbb{R}}$$

**Beispiel C)** $y' = \underbrace{t^2}_{-a(t)} \cdot y + \underbrace{\alpha t^2 e^{\frac{t^3}{3}}}_{h(t)}$

$\frac{dy}{dt} = y'(t) = t^2 y(t)$

$= t^2 \cdot y$

- homogene Gleichung:

$$\frac{dy}{dt} = t^2 \cdot y \iff \int \frac{dy}{y} = \int t^2 dt \iff \ln|y| = \frac{t^3}{3} + \tilde{c}$$

$t^3/3$ $\quad$ $\tilde{c}$ $\quad$ $| \exp$

$$\iff |y| = e^{\frac{t^3}{3}+\tilde{c}} = e^{t^3/3} \cdot \underbrace{e^{\tilde{c}}}_{c}$$

$$c \cdot y_h = c \cdot e^{\frac{t^3}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

$\frac{c(t)}{y_h(t)} = c(t)$

- spezielle /partikuläre Lösung $y_p$ der inhomogenen Aufgabe:

  –Spezielle Ansätze falls $h$ Polynom/$\cos$/$\sin$ etc. (s.unten)

  –**Variation der Konstanten:** Ansatz $\boxed{y_p(t) := c(t)y_h(t)}$

  Einsetzen in DGL

$c(t)\, e^{t^3/3} = y_p(t)$

$y_p' = c'(t)\, e^{t^3/3} + c(t)\, t^2 e^{t^3/3}$

$y_p = c(t) \cdot y_h(t)$

DGL: $y' - t^2 \cdot y = \alpha t^2 e^{\frac{t^3}{3}} =: h(t)$

$y_p' - t^2 \cdot y_p = c'(t) y_h(t) + c(t) y_h'(t) - t^2 \cdot c(t) y_h(t) = c'(t) y_h(t) \overset{!}{=} h(t)$

$y_h' = t^2 y_h$

Ansatz erfüllt dGL, wenn $\boxed{c'(t) y_h(t) = h(t)}$.

$c'(t) = \alpha t^2 \Leftarrow c(t) = \alpha \frac{t^3}{3}$

Hier also, wenn : $c'(t) e^{\frac{t^3}{3}} = \alpha t^2 e^{\frac{t^3}{3}}$

Zum Beispiel: $c(t) = \alpha \frac{t^3}{3} \Longrightarrow y_p(t) = \alpha \underbrace{\frac{t^3}{3} e^{\frac{t^3}{3}}}_{y_h}$

$y_p(t) = \alpha$

- Setze zusammen zur allg. Lösung der inhomogenen Aufgabe.

$$y(t) = y_p(t) + c \cdot y_h(t) = (\underbrace{\alpha \frac{t^3}{3}}_{y_p} + c) e^{\frac{t^3}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

**Bernoullische DGL:** $\boxed{y'(t) + a(t)y(t) - b(t)(y(t))^{\alpha} = 0}$

$\alpha \neq 0, 1$

$u(t) = (y(t))^{1-\alpha}$

Substitution : $u := y^{1-\alpha}$ liefert

$u'(t) = (1-\alpha)\, y(t)^{1-\alpha-1}\, y'(t)$

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \iff y' = \frac{y^{\alpha} \cdot u'}{1-\alpha}$$

Dies eingesetzt in die DGL ergibt

$$\frac{y^{\alpha} \cdot u'}{1-\alpha} + ay - by^{\alpha} = 0$$ vorausgesetzt $y \neq 0$ folgt

$| \, (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}$

$$u' + (1-\alpha)a\underbrace{y^{1-\alpha}}_{u} - (1-\alpha)by^{0} = 0 \iff$$

$$\boxed{u' + (1-\alpha)a \cdot u = (1-\alpha)b}$$

$-2 \cdot 2x\, u = (-2)\, 4x^3$

**Beispiel D)** $y' = 2x(2x^2y^2 - 1)y$ $= -2xy + 4x^3y^3$

Sortieren: $y' + 2xy^1 - 4x^3y^3 = 0$

$-b$

Bernoullische DGL mit : $\alpha = 3,\ a(x) = 2x,\ b(x) = 4x^3.$

Substitution: $u = y^{-2}$ liefert die neue Dgl. : $\underbrace{(u = y^{1-\alpha})}$

$$u' - 2 \cdot 2x \cdot u = -2 \cdot 4x^3 \iff \boxed{u' - 4x\overset{1}{u} = \overset{h(x)}{-8x^3}}$$

Diese ist linear. Homogene Gleichung: $u_h' - 4xu_h = 0$

$$\frac{du}{dx} = 4x \cdot u$$

$$\iff \ln|u| = 2x^2 + \tilde{c}$$

$$\cancel{\iff c \cdot u_h = c \cdot e^{2x^2}} \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

$\int \frac{du}{u} = \int 4x\,dx$

$|u| = e^{2x^2} \cdot e^{\tilde{c}}$

$\boxed{u_h = c \cdot e^{2x^2}}$

$\boxed{u_h(x) = c \cdot e^{2x^2}}$

$u_p = c(x) u_h = c(x) \cdot c \cdot e$

$u_p(x) = c(x)\, e^{2x^2}$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl. $u' - 4xu = -8x^3$ erhält man z.B. durch den polynomialen Ansatz

$c'(x)e^{2x^2} = -8x^3$

$$u_p = ax^2 + bx + c$$

$-4a = -8 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$

$x^0: \; b = 0$

$x^2: \; b = 0$

Einsetzen in die Dgl liefert

$$\underbrace{2ax + b}_{u'} \underbrace{- 4ax^3 - 4bx^2 - 4cx}_{-4xu} \overset{=}{=} \underbrace{-8x^3}_{-8x^3} \Longrightarrow u_p = 2x^2 + 1$$

$x^1: \; 2a - 4c = 0 \qquad \boxed{c = 1}$

Lösung $u = ce^{2x^2} + 2x^2 + 1.$

Für die ursprügliche Gleichung folgt

$\left(u = y^{-2} = \frac{1}{y^2}\right)$

$$y = \left(ce^{2x^2} + 2x^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

## Riccatische Differentialgleichungen

Gegeben sei eine partikuläre Lösung $y_p$ der Differentialgleichung

$$\boxed{y' + a(x)y^{1} + b(x)y^2 = c(x)\,.}$$

Weiterhin sei $y$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung.

Dann löst die Differenz $u = y - y_p$ die Differentialgleichung:

$$u' + [a(x) + 2b(x)y_p(x)]u + bu^2 = 0\,.$$

Lösungsmethode: Bernoulli DGL mit $\alpha = 2 \implies$

Standardsubstitution: $w := u^{1-2} = \dfrac{1}{y - y_p}$

Neue DGL: $$\boxed{w' - (a + 2b \cdot y_p)\, w = b\,.}$$

$0 \quad 1\left(-\frac{1}{t}\right)$

$w' + \frac{2}{t} w = b$

**Beispiel:**

$$y' = -y^2 + \frac{2}{t^2}.$$

$y' + 0 \cdot y^1 + 1 \cdot y^2 = \frac{2}{t^2}$

Die Differentialgleichung ist Riccatisch mit $a = 0,\ b = 1, c(t) = \frac{2}{t^2}$.

Wegen $\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}$ liegt der Ansatz $y_p = \frac{k}{t}$ nahe.

Einsetzen in die DGL für $y$ liefert

$$-\frac{k}{t^2} = -\frac{k^2}{t^2} + \frac{2}{t^2} \quad \Longleftrightarrow \quad k^2 - k - 2 = 0$$

mit den Lösungen $k = -1$ und $k = 2$.

Wir setzen $\boxed{y_p = -\frac{1}{t}}$ und $w := \frac{1}{y - y_p} = \frac{1}{y + \frac{1}{t}}$.

Die Differentialgleichung für $w$ lautet

$$w' - [a+2by_p]w = b \iff w' + \frac{2}{t}w = 1$$

$w_h' + \frac{2}{t}w_h = 0$

Lösung der zugehörigen homogenen Dgl $w_h' = -\frac{2}{t}w_h$:

$\frac{dw}{dt} = -\frac{2w}{t}$

$$\frac{dw}{w} = -\frac{2}{t}dt \iff \ln|w| = -2\ln|t| + \hat{c} \iff w_h = ct^{-2}.$$

$|w| = e^{\ln|t|\cdot(-2)} \cdot e^{\hat{c}}$

Lösung der inhomogenen Aufgabe mit Hilfe der Variation der Konstanten:

$|w| = t^{-2}\cdot\tilde{c}$ $\qquad \pm w = \hat{c}\,t^{-2}$

$w_p = c(t)\cdot t^{-2}$

$c'(t)\cdot t^{-2} = 1$

$$w = c(t)t^{-2}$$

Einsetzen in DGL für $w$

$w(t) = \frac{c}{t^2}$

$$\frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3} + \frac{2}{t}\cdot\frac{c(t)}{t^2} = 1$$

$w_p(t) = c(t)\cdot\frac{1}{t^2}$

$$c'(t) = t^2 \iff c(t) = \frac{t^3}{3} + C$$

$w' = c'(t)\frac{1}{t^2} + c(t)\frac{-2}{t^3}$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe

$$w = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^3}{3} + C\right) = \frac{t}{3} + \frac{C}{t^2} = \frac{t^3 + 3C}{3t^2}.$$

$$y = \frac{1}{w} - \frac{1}{t} = \frac{3t^2}{t^3 + 3C} - \frac{1}{t} = \frac{2t^3 - 3C}{t^4 + 3Ct}.$$

w war gegeben durch

$$w = \frac{1}{y + \frac{1}{t}}$$

| Typ | DGL | Lösung/Subst | ggf. neue DGL |
|---|---|---|---|
| separierbar | $\dot{y}(t) = h(t) \cdot g(y)$ | $\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$ | |
| Ähnlichkeits<br>DGL | $\dot{y}(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$ | $u(t) := \frac{y(t)}{t}$ | $u' = \dfrac{f(u) - u}{t}$<br>separierbar |
| Ähnlichkeits<br>DGL | $\dot{y}(t) = f(at + by(t) + c)$ | $u := at + by(t) + c$ | $\dot{u} = a + bf(u)$<br>separierbar |
| Lineare DGL<br>Lineare DGL | $\dot{y}_h(t) = -a(t)y_h(t)$<br>$\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + h(t)$ | $\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t)dt$<br>$y = c \cdot y_h + y_p$ | separierbar |
| Bernoullische<br>DGL | $\dot{y} + a(t)y - b(t)y^{\alpha} = 0$ | $u := y^{1-\alpha}$<br>$\alpha \neq 0,\ 1$ | $\dot{u} + (1-\alpha)a \cdot u =$<br>$(1-\alpha)b$<br>linear |
| Riccatische<br>DGL | $\dot{y} + a(t)y + b(t)y^2 = c(t)$<br>$c$ nicht ident. 0 | $u := \frac{1}{y - y_p}$ | $\dot{u} - [a + 2b \cdot y_p] \cdot u = b$<br>linear |

## Beispiele: $y' = u^2 + e^{1/u} = f(u)$

| Typ | DGL | Substitution | ggf. neue Diff.gleichung |
|---|---|---|---|
| | $x^2 y' = y^2 + x^2 e^{\frac{x}{y}}$ | | |
| | $y' - \frac{1}{\tan x} y + y^2 = \sin^2 x$ | | |
| | $\dot{y} - \frac{2}{t} y + \frac{1}{t^2} y^2 = 4t^2$ | | |
| | $4\dot{y} + \frac{4}{t} y + y^3 = 0$ | | |
| | $y' = \cos(2x - 3y)$ | | |
| | $\dot{y} + \sin(t) y = \cos(t)$ | | |

$$y' - \frac{2}{t}y + \frac{1}{t^2}y^2 = 4t^2$$

$$y = \alpha t^k$$

$$y' = \alpha k \cdot t^{k-1}$$

$$y^2 = \alpha^2 t^{2k}$$

$$k = 2$$

$$\underbrace{\alpha k t^{k-1} - 2\alpha t^{k-1}}_{0 \text{ für } k=2} + \underbrace{\alpha^2 t^{2k-2}}_{\alpha^2 t^2 = 4t^2} = 4t^2$$

für $k=2 \Rightarrow \alpha = 2$ $\qquad y = 2t^2$

probe $\quad 4t - 4t + \frac{1}{t^2}4t^4 = 4t^2$ ✓