Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Anleitung zu Blatt 1, Differentialgleichungen I

WiSe 2010/11

Elementare Lösungsmethoden für explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung

Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bisher : algebraische Geichungen $\longrightarrow$ Lösungen : Zahlen/Vektoren

Jetzt : Differentialgleichungen $\longrightarrow$ Lösungen: Funktionen

Gesucht : **Funktion** $y: D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\dot{y}(t) = f(t, y(t))}$$

Beispiel: DGL. $\quad \dot{y}(t) = \frac{1}{t}\, y(t) + t \qquad t \geq 1$

Jede Funktion $\quad y(t) = ct + t^2,\ c \in \mathbb{R}$ erfüllt die DGL

$\Longrightarrow$ **i.d.R. unendlich viele Lösungen!**

$\Longrightarrow$ **Anfangs- oder Randwerte nötig (AWe/RWe)**

Physikalisch klar: Geschwindigkeit bekannt $\longrightarrow$ Ort?

- DGL'n oft nur numerisch lösber
- spezielle Typen auch analytisch lösbar

Separierbare DGL/Trennung der Variablen

$$\boxed{y'(t) = f(t) \cdot g(y(t)) = f(t) \cdot g(y)}$$

Falls $g(y) \neq 0$:

$$\frac{1}{g(y(t))}\, y'(t) = f(t) \Longrightarrow \int \frac{1}{g(y(t))}\, y'(t)\, dt = \int f(t)\, dt$$

Substitution $Y := y(t), \quad dY/dt = y'(t), \quad dY = y'(t)dt$ liefert

$$\int \frac{1}{g(Y)}\, dY = \int f(t)\, dt$$

Übliche Kurzschreibweise

$$\boxed{y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \Longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt}$$

Beispiel A) $u'(t) = \frac{1}{t}\,(1 - 2u(t))$

$$\begin{aligned}
\frac{du}{1-2u} &= \frac{dt}{t} \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\ln|1-2u|}{-2} &= \ln|t| \, + \tilde{C} \\
\Longleftrightarrow \quad e^{\ln|1-2u|} &= e^{-2\ln|t| + \hat{C}} \\
\Longleftrightarrow \quad |1-2u| &= e^{-\ln|t|\cdot 2} \cdot e^{\hat{C}} = \, Ce^{-\ln|t|\cdot 2} \quad C \in \mathbb{R}^+ \\
&= \frac{C}{e^{\ln|t|\cdot 2}} \, = \, \frac{C}{t^2} \\
\Longleftrightarrow \quad 1 - 2u &= \frac{k}{t^2} \Longrightarrow u(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{k}{t^2}\right] \quad k \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Transformation auf separierbere DGL

Bestimmte Typen können auf separierbare DGL transformiert werden, u.B. $y' = f(\frac{y}{x})$ (siehe Vorlesung), oder $y' = f(ax + by + c)$.

Beispiel B)

$$y'(x) = 1 + \frac{2}{x - y + 4}, \qquad \text{für } x - y + 4 > 0\,,\, y(0) = 1$$

Substitution : $z = x - y + 4$ liefert

$$z' = 1 - y' = 1 - 1 - \frac{2}{z} \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{z}$$

Dies ist eine separierbare Dgl.
Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe: vor Ort.

Lineare DGL 1.Ordnung $\boxed{y'(t) + a(t)y(t) = h(t)}$

Zugehörige **homogenen** DGL : $y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0$

Inhomogenität : $h(t)$ enthält kein y

- Bestimme allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:
  $\dfrac{dy}{dt} = -a(t)y(t) \Longleftrightarrow \dfrac{dy}{y} = -a(t)dt \Longleftrightarrow \ln|y| = -\int a(t)dt \longrightarrow cy_h.$
- Bestimme eine (spezielle/partikuläre) Lösung y_p der inhomogenen Aufgabe.
- Setze zusammen zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Aufgabe.
  $$\boxed{y(t) = c \cdot y_h(t) + y_p(t) \qquad c \in \mathbb{R}}$$

Beispiel C) $y' = t^2 \cdot y + \alpha t^2 e^{\frac{t^3}{3}}$

- homogene Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= t^2 \cdot y \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = t^2 dt \Longleftrightarrow \ln|y| = \frac{t^3}{3} + \tilde{c} \\ &\Longleftrightarrow |y| = e^{\frac{t^3}{3} + \tilde{c}} \\ &\quad c \cdot y_h = c \cdot e^{\frac{t^3}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

- spezielle /partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Aufgabe:
  –Spezielle Ansätze falls h Polynom/ $\cos$ / $\sin$ etc. (s.unten)
  –**Variation der Konstanten:** Ansatz $\boxed{y_p(t) := c(t)y_h(t)}$
  Einsetzen in DGL: $y' - t^2 \cdot y = \alpha t^2 e^{\frac{t^3}{3}} =: h(t)$ ergibt

  $$y_p' - t^2 \cdot y_p = c'(t)y_h(t) + c(t)y_h'(t) - t^2 \cdot c(t)y_h(t) = c'(t)y_h(t)$$

  Ansatz erfüllt DGL, wenn $\boxed{c'(t)y_h(t) = h(t)}$.

  Hier also, wenn : $c'(t)e^{\frac{t^3}{3}} = \alpha t^2 e^{\frac{t^3}{3}}$

  Zum Beispiel: $c(t) = \alpha \dfrac{t^3}{3} \Longrightarrow y_p(t) = \alpha \dfrac{t^3}{3} e^{\frac{t^3}{3}}$
- Setze zusammen zur allg. Lösung der inhomogenen Aufgabe.

$$y(t) = y_p(t) + c \cdot y_h(t) = (\alpha \frac{t^3}{3} + c)e^{\frac{t^3}{3}} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Bernoullische DGL: $\boxed{y'(t) + a(t)y(t) - b(t)(y(t))^{\alpha} = 0}$
$\alpha \neq 0, 1$

Substitution : $u := y^{1-\alpha}$ liefert

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \Longleftrightarrow y' = \frac{y^{\alpha} \cdot u'}{1-\alpha}$$

Dies eingesetzt in die DGL ergibt

$$\frac{y^{\alpha} \cdot u'}{1-\alpha} + ay - by^{\alpha} = 0 \qquad \text{vorausgesetzt } y \neq 0 \text{ folgt}$$

$$u' + (1-\alpha)ay^{1-\alpha} - (1-\alpha)by^{0} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{u' + (1-\alpha)a \cdot u = (1-\alpha)b}$$

Beispiel D) $\quad y + \frac{e^t}{y^2} + 3t \cdot y' = 0 \qquad t \geq 2, \quad y(2) = 0$

Sortieren: $\quad y' + \frac{1}{3t}\, y^1 + \frac{e^t}{3t}\, y^{-2} = 0$

Bernoullische DGL mit : $\quad \alpha = -2\,.$

Substitution $u := y^{1-(-2)} = y^3$ liefert

$$u' + (1-\alpha)a \cdot u = (1-\alpha)b \Longleftrightarrow u' + \tfrac{1}{t}\, u = -\tfrac{e^t}{t}\,.$$

Lineare DGL mit zug. homogener Gleichung $\quad u_h' = -\frac{1}{t}\, u_h$

Lösung : Raten $(t^k)' = \frac{k}{t} \cdot t^k$ oder Separation liefert

$$u_h(t) = ct^{-1} \qquad u_p(t) = c(t)t^{-1}$$

Rest: auf Wunsch vor Ort

Riccatische Differentialgleichungen

Gegeben sei eine partikuläre Lösung y_p der Differentialgleichung

$$\boxed{y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)\ .}$$

Weiterhin sei y eine beliebige Lösung der Differentialgleichung. Dann löst die Differenz $u = y - y_p$ die folgende Bernoullische Differentialgleichung:

$$u' + [a(x) + 2b(x)y_p(x)]u + bu^2 = 0\,.$$

Lösungsmethode: Bernoulli DGL mit $\alpha = 2 \implies$ Standardsubstitution: $w := u^{1-2} = \dfrac{1}{y - y_p}$

Neue DGL: $\boxed{\qquad w' - (a + 2b \cdot y_p)\, w \;=\; b\,.}$

Beispiel:

$$y' \;=\; -y^2 \;+\; \frac{2}{t^2}.$$

Die Differentialgleichung ist Riccatisch mit $a = 0,\ b = 1, c(t) = \frac{2}{t^2}$.

Wegen $\left(\dfrac{1}{t}\right)' = -\dfrac{1}{t^2}$ liegt der Ansatz $y_p = \dfrac{k}{t}$ nahe.

Einsetzen in die DGL für y liefert

$$-\frac{k}{t^2} = -\frac{k^2}{t^2} + \frac{2}{t^2} \quad \Longleftrightarrow \quad k^2 - k - 2 = 0$$

mit den Lösungen $k = -1$ und $k = 2$.

Wir setzen $y_p = -\frac{1}{t}$ und $w := \dfrac{1}{y - y_p} = \dfrac{1}{y + \frac{1}{t}}$.

Die Differentialgleichung für w lautet

$$w' - [a + 2by_p]w = b \quad \Longleftrightarrow \quad w' + \tfrac{2}{t}w = 1$$

Lösung der zugehörigen homogenen Dgl $w_h' = -\frac{2}{t}w_h$:

$$\frac{dw}{w} = -\frac{2}{t}dt \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|w| = -2\ln|t| + \hat{c} \quad \Longleftrightarrow \quad w_h = ct^{-2}\,.$$

Lösung der inhomogenen Aufgabe mit Hilfe der Variation der Konstanten:

$$w = c(t)t^{-2} \qquad \text{Einsetzen in DGL für } w$$

$$\frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3} + \frac{2}{t} \cdot \frac{c(t)}{t^2} = 1$$

$$c'(t) = t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad c(t) = \frac{t^3}{3} + C$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe

$$w = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^3}{3} + C\right) = \frac{t}{3} + \frac{C}{t^2} = \frac{t^3+3C}{3t^2}.$$

$$y = \frac{1}{w} - \frac{1}{t} = \frac{3t^2}{t^3+3C} - \frac{1}{t} = \frac{2t^3-3C}{t^4+3Ct}.$$

Typ	DGL	Lösung/Subst	ggf. neue DGL
separierbar	$\dot y(t) = h(t)\cdot g(y)$	$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$	
Ähnlichkeits DGL	$\dot y(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$	$u(t) := \frac{y(t)}{t}$	$u' = \frac{f(u)-u}{t}$ separierbar
Ähnlichkeits DGL	$\dot y(t) = f(at + by(t) + c)$	$u := at + by(t) + c$	$\dot u = a + bf(u)$ separierbar
Lineare DGL Lineare DGL	$\dot y_h(t) = -a(t)y_h(t)$ $\dot y(t) = -a(t)y(t) + h(t)$	$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t)dt$ $y = c\cdot y_h + y_p$	separierbar
Bernoullische DGL	$\dot y + a(t)y - b(t)y^\alpha = 0$	$u := y^{1-\alpha}$ $\alpha \neq 0,\ 1$	$\dot u + (1-\alpha)a\cdot u = (1-\alpha)b$ linear
Riccatische DGL	$\dot y + a(t)y + b(t)y^2 = c(t)$ c nicht ident. 0	$u := \frac{1}{y-y_p}$	$\dot u - [a + 2b\cdot y_p]\cdot u = b$ linear

Beispiele:

Typ	DGL	Substitution	ggf. neue Diff.gleichung
	$x^2y' = y^2 + x^2e^{\frac{x}{y}}$		
	$y' - \frac{1}{\tan x}\,y + y^2 = \sin^2 x$		
	$\dot y - \frac{2}{t}y + \frac{1}{t^2}y^2 = 4t^2$		
	$4\dot y + \frac{4}{t}y + y^3 = 0$		
	$y' = \cos(2x - 3y)$		
	$\dot y + \sin(t)y = \cos(t)$		

Spezielle Ansätze bei linearen DGL mit Konstanten Koeffizienten

$$\boxed{y' \;=\; -a \cdot y \;+\; h(t) \qquad a \in \mathbb{R} \text{ konstant}}$$

Lösung der homogenen Aufgabe $\qquad y_h = c \cdot e^{-at}$.

Partikuläre Lösung im allg. über Variation der Konstanten. Bei speziellen rechten Seiten (Inhomogenitäten h) oft einfacher: spezielle Ansätze.

Inhomogenität	Ansatz
$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$	$y_p(t) := b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$
$e^{\lambda t} \qquad \lambda \neq a$ $e^{\lambda t} \qquad \lambda = a$	$y_p(t) := k \cdot e^{\lambda t}$ $y_p(t) := kt \cdot e^{\lambda t}$
$k \cos(mt)$ $k \sin(mt)$	$y_p(t) := \alpha \sin(mt) + \beta \cos(mt)$ $y_p(t) := \alpha \sin(mt) + \beta \cos(mt)$
$(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)e^{\lambda t}$ $\lambda \neq a$ $\lambda = a$	$y_p(t) := (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{\lambda t}$ $y_p(t) := (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)te^{\lambda t}$
$(a_0 + \cdots + a_n t^n)(\cos(mt))$ $(a_0 + \cdots + a_n t^n)(\sin(mt))$	$y_p(t) := (b_0 + \cdots + b_n t^n)\sin(mt)$ $+(c_0 + \cdots + c_n t^n)\cos(mt)$

Bei Riccati: Koeffizienten polynome $\longrightarrow$ Ansatz: y_p Polynom

<u>**Modellierungsaufgabe:**</u> Siehe Lösung zur Aufgabe 3, Blatt 0.

Näherungslösung mit MATLAB ode45

Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe (AWA) : $\boxed{\dot{y}(t) \; = \; f\,(t,\, y(t)) \qquad y(t_0) = y_0}$

Gesucht: Näherung für $y(t)$ auf dem Zeitintervall $[t_0,\, t_{final}]$ bzw. Näherungen für $y(t_k)$ für vorgegebene Werte t_k aus dem Zeitintervall $[t_0,\, t_{final}]$

Notwendige Vorgaben: $t-$ Bereich, y_0, rechte Seite der DGL f

- $t-$ Bereich:

```
 >> tspan=[t_0 tfinal];        %z.B. tspan=[0 5]
oder
 >> tspan=t_0:Schrittweite:tfinal; %z.B. tspan=0:0.01:5;
```

- y_0,

```
 >> y0=Wert;        %z.B. y0=2 spaeter auch y0=Vektor
```

- rechte Seite der DGL f als function in einem gleichnamigen m-file

Zum Beispiel für $f(t, y) = t \cdot y,\ y(0) = 2$, Näherung gesucht für $t \in [0, 5]$:

m-file mit Namen funk1

****

```
function dydt=funk1(T,Y)
dydt=T*Y
```

Weiteres m-file mit Namen aufg3:

****

```
tspan=[0 5];
y0=2;
[t,y]=ode45(@funk1,tspan,y0);
plot(t,y)
```

Aufruf in Matlab

$>>$ aufg3

Ausgabe: Plot einer Näherung für die Lösung

Zu jeder Komponente des Vektors tspan $(t_1, \cdots, t_n)$ wird eine Näherung $y_k \approx y(t_k)$ ausgerechnet und gespeichert. Später bei Systemen gehört zu jedem Zeitpunkt eine Zeile von Komponenten der Lösung.

ACHTUNG: t,y sind Vektoren. Will man weiterrechnen, z.B. um mit der exakten Lösung $y(t) = 2e^{t^2/2}$ zu vergleichen, rechnet man z.B.

```
yex=2*exp(t.*t./2);
oder
yex=2*exp((t.^2)/2);
err=yex-y;
plot(t,err) %Plot der absoluten Fehler
```