Vollständigkeit der Prädikatenlogik

Vorstellung des Vollständigkeitssatzes

Sei □□eine Menge von Sätzen:

Formulierung 1: Wenn □□konsistent ist, ist □□ erfüllbar.

Formulierung 2: Für alle □□und Sätze A gilt: Wenn □□= A dann □□– A.

Definition vollständig

12.1 Eine Menge Γ heißt vollständig, wenn für alle Sätze A gilt: $A \in \Gamma$ oder $\neg A \in \Gamma$.

12.2 Sei Γ vollständig und konsistent.

1) Wenn $\Gamma \vdash A$, dann gilt $A \in \Gamma$.

2) $A \wedge B \in \Gamma$ gdw, $A \in \Gamma$ und $B \in \Gamma$.

3) $A \vee B \in \Gamma$ gdw, $A \in \Gamma$ oder $B \in \Gamma$.

4) $A \rightarrow B \in \Gamma$ gdw, $A \notin \Gamma$ oder $B \in \Gamma$.

12.2 Sei Γ vollständig und konsistent.

1) Wenn $\Gamma \vdash A$, dann gilt $A \in \Gamma$.

12.2 Sei Γ vollständig und konsistent.

3) $A \vee B \in \Gamma$ gdw, $A \in \Gamma$ oder $B \in \Gamma$.

12.3 Wenn L die Sprache zu Γ ist und Γ konsistent in L ist, ist Γ auch in L' konsistent, wobei L' aus L durch Hinzufügen von abzählbar unendlich vielen Konstantensymbolen entsteht.

Definition gesättigte Menge

12.4 Die Menge Γ in der Sprache L heißt gesättigt, wenn zu jeder Formel $A(x) \in Frm(L)$ mit einer freien Variable x ein Konstantensymbol $c \in L$ existiert, sodass $\exists x\, A(x) \rightarrow A(c) \in \Gamma$ gilt

12.6 Jede konsistente Menge Γ kann zu einer konsistenten, gesättigten Menge Γ' erweitert werden.

12.7 Sei Γ eine konsistente, vollständige und gesättigte Menge.

- Es gilt $\exists x\, A(x) \in \Gamma$ gdw, $A(t) \in \Gamma$ für mindestens einen geschlossenen Term t gilt.

- Es gilt $\forall x\, A(x) \in \Gamma$ gdw, $A(t) \in \Gamma$ für alle geschlossenen Terme t gilt.

12.8 (Lindenbaums Lemma) Jede konsistente Menge Γ kann zu einer vollständigen, kompletten Menge Γ' erweitert werden.

12.9 Das Termmodell

Sei Γ' eine vollständige, konsistente und gesättigte Menge in der Sprache L. Dann lässt sich das Modell M(Γ') folgendermaßen definieren:

- Die Domain |M(Γ*)| ist die Menge aller geschlossenen Terme von L.
- Für ein Konstantensymbol c gilt $c^{M(\Gamma^*)} = c$
- Die Interpretation von einer Funktion f ist die Funktion f, die für die geschlossen Termen $t_1, \ldots, t_n$ den Wert $f(t_1,...,t_n)$ zuordnet, also $f^{M(\Gamma^*)}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1,...,t_n)$
- Für ein Relationssymbol R gilt $(t_1, \ldots, t_n) \in R^{M(\Gamma^*)}$ gdw, $R(t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma^*$

12.10 Es gilt $\mathrm{Val}^{M(\Gamma^*)}(t) = t$.

12.11 Sei M(Γ*) das Termmodell zu Γ*:
Es gilt $M(\Gamma^*) \models \exists x\, A(x)$ gdw, $M(\Gamma^*) \models A(t)$ für mindestens einen Term t gilt.

Es gilt $M(\Gamma^*) \models \forall x\, A(x)$ gdw, $M(\Gamma^*) \models A(t)$ für alle Terme t gilt.

12.12 (Wahrheits-Lemma) Angenommen A enthält kein =, dann gilt $M(\Gamma^*) \models A$ gdw, $A \in \Gamma^*$.

12.13 Sei Γ^* eine konsistente, vollständige Menge. Dann lässt sich die Relation $\approx$ auf geschlossenen Termen definieren durch $t \approx t' \Leftrightarrow t = t' \in \Gamma^*$.

12.14 Eigenschaften von ≈

- ≈ ist eine Äquivalenzrelation
- Falls t = t', f ein Funktionssymbol und $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ Terme gilt: $f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n) \approx f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n)$
- Falls t = t', R ein Relationssymbol und $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ Terme gilt:
  $R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n) \in \Gamma^* \Leftrightarrow R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t', t_{i+1}, \ldots, t_n) \in \Gamma^*$

12.16 Definition Termmodell

Sei $M = M(\Gamma^*)$ das Termmodell von Γ^*. Dann sei das Modell $M/\approx$ definiert durch:

- $|M/\approx| = Trm(L)/\approx$
- $c^{M/\approx} = [c]_{\approx}$
- $f^{M/\approx}([t_1]_{\approx}, \ldots, [t_n]_{\approx}) = [f(t_1, \ldots, t_n)]_{\approx}$
- $[t_1]_{\approx}, \ldots, [t_n]_{\approx} \in R^{M/\approx} \Leftrightarrow M \models R(t_1, \ldots, t_n)$

12.18 Sei $M = M(\Gamma^*)$. Dann gilt $\mathrm{Val}^{M/\approx}(t) = [t]_{\approx}$.

12.19 Es gilt $M/\approx \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma^*$.

12.20 Wenn □□konsistent ist, ist □□erfüllbar.

12.21 Für alle □ und Sätze A gilt:
Wenn □ ⊨ A dann □ ⊢ A.