Haben: Struktur modallogischer Sprache, jetzt: Interpretation dieser, wann wahr?

Def 1.1: Ein Frame $\mathfrak{F}$ (für die grundlegende modallogische Sprache) ist ein Paar $\mathfrak{F} := (W, R)$ bestehend aus einer Menge $W \neq \emptyset$, auch Universum genannt, und einer 2-stelligen Relation R auf W.

Def 1.2: Ein Modell $\mathfrak{M}$ ein Paar $\mathfrak{M} := (\mathfrak{F}, V)$ bestehend aus einem Frame $\mathfrak{F}$ und einer Funktion V $V: \Phi \to \mathcal{P}(W)$, $p \mapsto V(p) \subseteq W$, die Auswertung heißt. Wir sagen $\mathfrak{M}$ basiert auf $\mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{F}$ unterlegt $\mathfrak{M}$.

Def 1.3: Sei $\mathfrak{M} := (W, R, V)$, $w \in W$ und χ Formel. Dann ist χ ist wahr/erfüllt in $\mathfrak{M}$ bei w $(\mathfrak{M}, w \Vdash \chi)$, gdw:

i) $\chi \equiv p$: $\mathfrak{M}, w \Vdash p \Leftrightarrow w \in V(p)$ mit $p \in \Phi$

i) $\chi \equiv \neg\varphi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow$ nicht $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$

iii) $\chi \equiv \bot$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ nie

iv) $\chi \equiv \varphi \vee \psi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ oder $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$

iv) $\chi \equiv \Diamond\varphi$: $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow$ für ein $v \in W$ mit Rwv gilt $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

Sonst sagen wir χ ist falsch bei w in $\mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi)$.

Bem 1.4: Andere Junktoren $(\wedge, \to, \leftrightarrow)$ können aus den üblichen äquivalenten Formeln und $\Box$ aus der Definition des dualen Operators herleiten. $(\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow$ für alle $v \in W$ mit Rwv gilt $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi)$.

Def 1.5: Eine Menge Σ von Formeln ist wahr bei w im Modell $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $(\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma)$ gdw alle $\sigma \in \Sigma$ wahr bei w in $\mathfrak{M}$ sind.

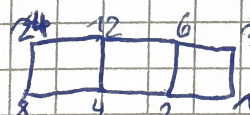
Notation 1.6: Falls $\mathfrak{M}$ klar ist, schreiben $w \Vdash \varphi$ oder $w \nVdash \varphi$.

Def 1.7: Sei $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ein Modell und φ Formel. Dann heißt φ global wahr $(\mathfrak{M} \Vdash \varphi)$, gdw. φ bei jedem $w \in W$ wahr ist.

φ heißt erfüllbar, gdw. es ein $w \in W$ mit $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, und falsifizierbar, gdw. $\neg\varphi$ erfüllbar ist. Analog für eine Menge Σ von Formeln.

Beispiel 1.8: i) $\mathfrak{F} := (\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, R)$ mit $Rw_iw_j :\Leftrightarrow j = i+1$. $w_1 \to w_2 \to w_3 \to w_4 \to w_5$

Sei V Auswertung mit $V(p) = \{w_2, w_3\}$, $V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ und $V(r) = \emptyset$. Dann gilt in $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$: a) $w_1 \Vdash \Diamond\Box p$; b) $w_2 \Vdash \Diamond(p \wedge \neg r)$; c) $w_1 \nVdash \Diamond\Box p \to p$ und d) $\mathfrak{M} \Vdash \Box q$



ii) $\mathfrak{F} = (\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, R)$ mit $Rxy :\Leftrightarrow x \neq y \wedge x \mid y$, Auswertung V mit $V(q) = \{6\}$ und $V(p) = \{4, 8, 12, 24\}$: $4 \Vdash \Box p$, $6 \Vdash \Box p$, $2 \nVdash \Box p$, $2 \Vdash \Diamond(q \wedge \Box p) \wedge \Diamond(\neg q \wedge \Box p)$

Notation 1.9: schreibe $\Diamond^n\varphi$ für $\underbrace{\Diamond\dots\Diamond}_{n\text{ mal}}\varphi$ und analog $\Box^n\varphi$

Bemerkung 1.10: $\Diamond$ geht R-schrittweise durch das Modell. Mittels $R^0xy \Leftrightarrow x=y$ und $R^{n+1}xy \Leftrightarrow \exists z(R^n xz \wedge Rzy)$ erhält man $\mathfrak{M},w\Vdash\Diamond^n\varphi \Leftrightarrow$ $\exists v(R^n wv \wedge \mathfrak{M},v\Vdash\varphi)$, also macht $\Diamond^n$ n R-Schritte.

Def 1.11: Sei τ ein Ähnlichkeitstyp. Dann ist ein τ-Frame $\mathfrak{F}$ ein Tupel bestehend aus einer Menge $W\neq\emptyset$ und für alle $n\geq 0$ und jeden n-stelligen Operator Δ aus τ einer $n+1$-stelligen Relation R_Δ, also $\mathfrak{F}:=(W,R_\Delta)_{\Delta\in\tau}$.

Def 1.12: Ein τ-Modell $\mathfrak{M}$ ist ein Paar $(\mathfrak{F},V)$ bestehend aus einem τ-Frame $\mathfrak{F}$ und einer Auswertung V.

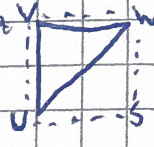
Eine Formel heißt erfüllt/wahr bei $w\in W$ in $\mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M},w\Vdash\varphi)$, wenn sie atomar/boolesch ist wie in 1.3 und sonst für $\rho(\Delta)>0$: $\mathfrak{M},w\Vdash\Delta(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \Leftrightarrow$ für ein $v_1,\dots,v_n\in W$ mit $R_\Delta w v_1\dots v_n$ gilt für alle $1\leq i\leq n$ $\mathfrak{M},v_i\Vdash\varphi_i$ und für $\rho(\Delta)=0$: $\mathfrak{M},w\Vdash\Delta \Leftrightarrow w\in R_\Delta$

Die Notation und Definition von global wahr sind analog zu vorher.

Beispiel 1.13: i) Sei τ Ähnlichkeitstyp mit 3 einstelligen Operatoren $\langle a\rangle,\langle b\rangle,\langle c\rangle$, dann hat ein τ-Frame $\mathfrak{F}$ 3 zweistellige Relationen R_a,R_b,R_c. Nehmen wir als Universum $W=\{w_1,w_2,w_3,w_4,w_5\}$ und Relationen $R_a=\{(w_1,w_2),(w_1,w_4)\}$, $R_b\{(w_2,w_3)\}$ und $R_c\{(w_4,w_3)\}$. $w_1 \xrightarrow{a} w_2 \xrightarrow{b} w_3 \xleftarrow{c} w_4$ a

Sei V Auswertung mit $V(p)=\{w_2\}$. Es gilt $w_1\Vdash\langle a\rangle p\to\langle b\rangle p$, denn w_1 hat nur einen R_a-Nachfolger, bei dem p wahr ist, aber keinen R_b-Nachfolger.

ii) Sei τ Ähnlichkeitstyp mit einem zweistelligen Operator Δ und einem dreistelligen Operator O. Sei $W=\{u,v,w,s\}$ und $R_\Delta=\{(u,v,w)\}$ und $R_O=\{(u,v,w,s)\}$ mit Auswertung V mit $V(p_0)=\{v\}$, $V(p_1)=\{w\}$ und $V(p_2)=\{s\}$.



$\Delta(p_0,p_1)\to O(p_0,p_1,p_2)$ ist global wahr.

Def 1.14: Eine Formel φ ist gültig bei $w\in W$ in Frame $\mathfrak{F}=(W,R)$ $(\mathfrak{F},w\Vdash\varphi)$, gdw. φ in jedem Modell $(\mathfrak{F},V)$ basierend auf $\mathfrak{F}$ bei w wahr ist. φ ist gültig in $\mathfrak{F}$ $(\mathfrak{F}\Vdash\varphi)$, gdw. es bei jedem $w\in W$ gültig ist, und φ ist gültig auf einer Klasse F von Frames $(F\Vdash\varphi)$, gdw. es bei jedem $\mathfrak{F}\in F$ gültig ist.

φ heißt gültig ($\Vdash\varphi$), wenn es auf der Klasse aller Frames gültig ist.
Die Menge aller Formeln, die auf einer Klasse $\mathcal{F}$ von Frames gültig ist, wird Logik von $\mathcal{F}$ ($\Lambda_{\mathcal{F}}$) genannt.

Beispiel 1.15: i) $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$ ist gültig, denn sei $\mathcal{F}=(W,R)$ ein Frame, $w \in W$ und V eine Auswertung auf $\mathcal{F}$. Angenommen, $(\mathcal{F},V), w \Vdash \Diamond(p \vee q)$, dann gibt es $v \in W$ mit Rwv und $(\mathcal{F},V), v \Vdash p \vee q$, also $v \Vdash p$ oder $v \Vdash q$, also $w \Vdash \Diamond p$ oder $w \Vdash \Diamond q$ und somit $w \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$.

ii) $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ ist nicht auf allen Frames gültig. Konstruiere $\mathcal{F}$: $W=\{0,1,2\}$, $R=\{(0,1),(1,2)\}$ $0 \to 1 \to 2$ und sei V Auswertung mit $V(p)=\{2\}$, dann gilt $(\mathcal{F},V), 0 \Vdash \Diamond\Diamond p$, aber $(\mathcal{F},V), 0 \not\Vdash \Diamond p$. Es gibt aber Frames auf denen die Formel gültig ist und zwar solche, die eine transitive Relation R haben. Wenn dann $w \Vdash \Diamond\Diamond p$ gilt, gibt es $v,v \in W$ mit Rwv und Rvv und $v \Vdash p$. Da R transitiv ist, gilt dann auch Rwv, also $w \Vdash \Diamond p$.

iii) Betrachte erneut Bsp. 1.13 i), wo $\langle a\rangle p \to \langle b\rangle p$ nicht gültig ist, aber, wenn wir $R_a \subseteq R_b$ verlangen, dann schon. Gilt umgekehrt $\langle a\rangle p \to \langle b\rangle p$ auf einem Frame, so erfüllt dieser $R_a \subseteq R_b$. Gewissermaßen definiert die Formel also diese Eigenschaft.

Danke fürs Zuhören!