Weitere Eigenschaften Der Aussagenlogik

Von Uka Rattinger

Theorem 1.3.1

Die folgenden Aussagen sind Tautologien:

$(\phi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \phi \vee (\psi \vee \sigma)$ $\quad$ $(\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \phi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

Assoziativität

$\phi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \phi$ $\quad$ $\phi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \phi$

Kommutativität

$\phi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma)$ $\quad$ $\phi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)$

Distributivität

$\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$ $\quad$ $\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi$

De Morgansche Gesetze

$\phi \vee \phi \leftrightarrow \phi$ $\quad$ $\phi \wedge \phi \leftrightarrow \phi$

Idempotenz

$\neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$

Doppel Negations Regel

Lemma 1.3.2

Wenn $\models \phi \rightarrow \psi$, dann ist $\models \phi \wedge \psi \leftrightarrow \phi$ und $\models \phi \vee \psi \leftrightarrow \psi$

Beweis:

$\models \phi \rightarrow \psi$ impliziert $[[\phi]]_v \leq [[\psi]]_v$ für alle v (folgt direkt aus den Wahrheitstafeln). Also

$[[\phi \wedge \psi]]_v = \min([[\phi]]_v, [[\psi]]_v) = [[\phi]]_v$ und $[[\phi \vee \psi]]_v = \max([[\phi]]_v, [[\psi]]_v) = [[\psi]]_v$

Für alle v. □

Lemma 1.3.3

(a) $\models \phi \Rightarrow \models \phi \wedge \psi \leftrightarrow \psi$

(b) $\models \phi \Rightarrow \models \neg\phi \vee \psi \leftrightarrow \psi$

(c) $\models \bot \vee \psi \leftrightarrow \psi$

(d) $\models \top \wedge \psi \leftrightarrow \psi$

Beweis:

Lässt sich selbst einfach erschließen. □

Theorem 1.3.4

(a) $\models(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$,

(b) $\models(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)$,

(c) $\models \phi \vee \psi \leftrightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi)$,

(d) $\models \phi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$,

(e) $\models \phi \wedge \psi \leftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$,

(f) $\models \neg\phi \leftrightarrow (\phi \rightarrow \bot)$,

(g) $\models \bot \leftrightarrow \phi \wedge \neg\phi$.

Beweis:

Folgt wieder sehr einfach aus den Wahrheitstafeln oder lassen sich schnell aus den vorigen Aussagen herleiten (z.B. c) und d) ist einfach De Morgan und Doppelnegationsregel) □

Notation

Wir schreiben im folgenden $\phi \approx \psi$ für $\models \phi \leftrightarrow \psi$ und können nun mit der Aussagenlogik so umgehen als wäre es die Algebra. Dies motiviert folgendes Lemma:

Lemma 1.3.5

≈ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge PROP, d.h. Es gilt:

$\phi \approx \phi$ (Reflexivität),

$\phi \approx \psi \Rightarrow \psi \approx \phi$ (Symmetrie),

$\phi \approx \psi$ und $\psi \approx \sigma \Rightarrow \phi \approx \sigma$ (Transitivität).

Beweis:

Wir nutzen $\models \phi \leftrightarrow \psi$ genau dann wenn $[[\phi]]_v = [[\psi]]_v$ für alle v und dann werden die einzelnen Aussagen von dem “=” geerbt. □

Folgerungen/ Beispiele

Wir können nun durchs algebraische “Rechnen” und mithilfe von Gleichungsketten Äquivalenzen beweisen:

1) $\models [\phi \to (\psi \to \sigma)] \leftrightarrow [\phi \wedge \psi \to \sigma]$,

<u>Beweis:</u>

$\phi \to (\psi \to \sigma) \approx \neg\phi \vee (\psi \to \sigma)$, (1.3.4(b))

$\neg\phi \vee (\psi \to \sigma) \approx \neg\phi \vee (\neg\psi \vee \sigma)$, (1.3.4(b) und Substitutionsregel)

$\neg\phi \vee (\neg\psi \vee \sigma) \approx (\neg\phi \vee \neg\psi) \vee \sigma$, (Assoziativität)

$(\neg\phi \vee \neg\psi) \vee \sigma \approx \neg(\phi \wedge \psi) \vee \sigma$,(De Morgan und Substitutionsregel)

$\neg(\phi \wedge \psi) \vee \sigma \approx (\phi \wedge \psi) \to \sigma$, (1.3.4(b))

Also folgt $\phi \to (\psi \to \sigma) \approx (\phi \wedge \psi) \to \sigma$ #

(Wir lassen jetzt die Referenzen weg)

2) $\models(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$

Beweis:

$\neg\psi \rightarrow \neg\phi \approx \neg\neg\psi \vee \neg\phi \approx \psi \vee \neg\phi \approx \neg\phi \vee \psi \approx \phi \rightarrow \psi$ #

3) $\models \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

Beweis:

$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi) \approx \neg\phi \vee (\neg\psi \vee \phi) \approx (\neg\phi \vee \phi) \vee \neg\psi$
#

Konvention:

Wir haben gesehen, dass $\vee$ und $\wedge$ assoziativ sind, also können wir es wie in der Algebra einführen, dass wir Klammern weglassen und iterative Konjunktion sowie Disjunktion schreiben als $\phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3 \vee \phi_4$. Dies funktioniert, da mit beliebiger wiedereinführung der Klammern die Aussagen alle äquivalent sind.

Theorem 1.3.6

Für jeden n-stelligen logischen Junktor $ definiert durch seine Evaluationsfunktion, existiert eine Aussage τ, bestehend aus $p_1,...,p_n$, $\vee$ und $\neg$, sodass $\models \tau \leftrightarrow \$(p_1,...,p_n)$

Beweis: (Induktion nach n)

IA: n=1 Hier existieren nur 4 mögliche Wahrheitstafeln:

$\$_1$	
0	0
1	0

$\$_2$	
0	1
1	1

$\$_3$	
0	0
1	1

$\$_4$	
0	1
1	0

Man sieht schnell, dass die Aussagen $\neg(p \vee \neg p)$, $p \vee \neg p$, p und $\neg p$ die Bedingungen erfüllen.

Fortsetzung des Beweises

Induktionsschritt:

Nehme an wir haben ein $n \in \mathbb{N}$ sodass alle n-stelligen Aussagen wie in dem Theorem gefunden wurden. Betrachte nun für beliebiges n+1-stelliges $ die Wahrheitstafel:

p_1	p_2	...	p_n	p_{n+1}	$\$(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1})$
0	0		0	0	i_1
.	.		0	1	i_2
.	0		1	.	.
.	1		1	.	.
0	.		.	.	.
.	1		.	.	.
...					
1	0		.	.	.
.	.		.	.	.
.	.		.	.	.
.	0		.	.	.
.	1		0	.	.
.	.		0	.	.
1	.		1	0	.
.	.		1	1	$i_{2^{n+1}}$

Hier ist $i_k \leq 1$

Definiere nun $\$_1$ und $\$_2$ durch:

$\$_1(p_2,...,p_{n+1}) = \$(\bot, p_2,...,p_{n+1})$ und

$\$_2(p_2,...,p_{n+1}) = \$(\top, p_2,...,p_{n+1})$

(jeweils die untere und obere Hälfte der Wahrheitstafel)

Fortsetzung des Beweises

Nach der Induktionshypothese lassen sich Aussagen σ_1 und σ_2 finden, welche nur $p_2,...,p_{n+1}$, $\vee$ und $\neg$ beinhalten, sodass $\models \$_i(p_2,...,p_{n+1}) \leftrightarrow \sigma_i$. Aus diesen Aussagen können wir τ definieren:

$\tau := (p_1 \rightarrow \sigma_2) \wedge (\neg p_1 \rightarrow \sigma_1)$

Behauptung: $\models \$(p_1,...,p_{n+1}) \leftrightarrow \tau$.

Fall 1: $[[p_1]]_v = 0$

Dann ist $[[p_1 \rightarrow \sigma_2]]_v = 1$, es folgt $[[\tau]]_v = [[\neg p_1 \rightarrow \sigma_1]]_v = [[\sigma_1]]_v = [[\$_1(p_2,...,p_{n+1})]]_v$

$= [[\$(p_1,p_2,...,p_{n+1})]]_v$, für $[[p_1]]_v = 0 = [[\ \bot]]_v$

Der Fall $[[p_1]]_v = 1$ ist ähnlich.

Mithilfe von 1.3.4 definieren wir ein τ' indem wir bei τ die $\rightarrow$ und $\wedge$ durch $\vee$ und $\neg$ ersetzen. So erhalten wir $[[\tau']] = [[\$(p_1,...,p_{n+1})]]$ Für alle Evaluationen und τ' enthält nur die Junktoren $\vee$ und $\neg$. □

Definition 1.3.7

$$\begin{cases} \bigwedge\!\!\bigwedge_{i\leq 0} \varphi_i = \varphi_0 \\ \bigwedge\!\!\bigwedge_{i\leq n+1} \varphi_i = \bigwedge\!\!\bigwedge_{i\leq n} \varphi_i \wedge \varphi_{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bigvee\!\!\bigvee_{i\leq 0} \varphi_i = \varphi_0 \\ \bigvee\!\!\bigvee_{i\leq n+1} \varphi_i = \bigvee\!\!\bigvee_{i\leq n} \varphi_i \vee \varphi_{n+1} \end{cases}$$

Definition 1.3.8

Wenn $\varphi = \bigwedge_{i \leq n} \bigvee_{j \leq m_i} \varphi_{ij}$ wobei φ_{ij} atomar oder die Negation eines Atoms ist, dann

ist φ eine konjunktive Normalform. Analog bei $\varphi = \bigvee_{i \leq n} \bigwedge_{j \leq m_i} \varphi_{ij}$

ist φ eine disjunktive Normalform.

Dies ist analog zu den Normalformen der Algebra, wobei zum Beispiel

$ax^2 + byx$ “normal” ist, aber $x(ax+by)$ nicht. Aufgrund der Dualität von $\wedge$ und $\vee$ haben wir in der Logik zwei verschiedene Normalformen

Theorem 1.3.9

Für jedes ϕ existieren konjunktive Normalformen $\phi^{\wedge}$ und disjunktive Normalformen $\phi^{\vee}$, sodass $\models \phi \leftrightarrow \phi^{\wedge}$ und $\models \phi \leftrightarrow \phi^{\vee}$.

Beweis:

Dirk van Dalen, Logic and Structure Seite 25-26

Definition 1.3.10

Wir definieren erst eine Hilfsabbildung *:PROP → PROP rekursiv:

$$\phi^* = \neg\phi, \text{ wenn } \phi \text{ atomar ist,}$$

$$(\phi \wedge \psi)^* = \phi^* \vee \psi^*,$$

$$(\phi \vee \psi)^* = \phi^* \wedge \psi^*,$$

$$(\neg\phi)^* = \neg\phi^*$$

Beispiel

$((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2)^* = (p_0 \wedge \neg p_1)^* \wedge p_2^* = (p_0^* \vee (\neg p_1)^*) \wedge \neg p_2$

$= (\neg p_0 \vee \neg p_1^*) \wedge \neg p_2 = (\neg p_0 \vee \neg\neg p_1) \wedge \neg p_2$

$\approx (\neg p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_2$

Lemma 1.3.11

$[[\phi^*]] = [[\neg\phi]]$

Beweis: (Induktion auf ϕ)

Für atomare ϕ gilt: $[[\phi^*]] = [[\neg\phi]]$. Außerdem ist

$[[(\phi \wedge \psi)^*]] = [[\phi^* \vee \psi^*]] = [[\neg\phi \vee \neg\psi]]) = [[\neg(\phi \wedge \psi)]])$.

Die Fälle $[[(\phi \vee \psi)^*]]$ und $[[(\neg\phi)^*]]$ sind Übungsaufgaben. □

Korollar 1.3.12

$\models \phi^* \leftrightarrow \neg\phi$

Beweis:

Folgt direkt aus Lemma 1.3.11 □

Definition 1.3.13

Die Dualitätsabbildung ^{d}: PROP $\to$ PROP ist rekursiv definiert durch:

$$\phi^{d} = \phi, \text{ falls } \phi \text{ atomar},$$

$$(\phi \wedge \psi)^{d} = \phi^{d} \vee \psi^{d},$$

$$(\phi \vee \psi)^{d} = \phi^{d} \wedge \psi^{d},$$

$$(\neg\phi)^{d} = \neg\phi^{d}.$$

Theorem 1.3.14 (Dualitäts-Theorem)

$$\models \phi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \models \phi^d \leftrightarrow \psi^d$$

Beweis:

Wir nutzen die *-Translation als Zwischenschritt und etablieren das mehrfache Substituieren, um den Beweis zu vereinfachen:

$\sigma[\tau_0,...,\tau_n/p_0,...,p_n]$ erhalten wir indem τ_i für p_i gleichzeitig substituiert wird für alle $i \leq n$. Wir sehen unmittelbar, dass $\phi^* = \phi^d[\neg p_0,...,\neg p_n/p_0,...,p_n]$ insbesondere ist

$\phi^*[\neg p_0,..., \neg p_n/p_0,...,p_n] = \phi^d[\neg\neg p_0,...,\neg\neg p_n/p_0,...,p_n]$, wobei die Atome von ϕ unter den $p_0,...,p_n$ sind. Mit dem Substitutions Theorem folgt:

$\models \phi^d \leftrightarrow \phi^*[\neg p_0,..., \neg p_n/p_0,...,p_n]$ Analog hält diese Äquivalenz auch für ψ. Nun folgt aus Korollar 1.3.12: $\models \phi^* \leftrightarrow \neg\phi$, $\models \psi^* \leftrightarrow \neg\psi$. Weil $\models \phi \leftrightarrow \psi$ und deshalb $\models \neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$

Gilt auch $\models \phi^* \leftrightarrow \psi^*$ und somit $\models \phi^*[\neg p_0,...,\neg p_n/p_0,...,p_n] \leftrightarrow \psi^*[\neg p_0,...,\neg p_n/p_0,...,p_n]$

Mit der obig festgestellten Beziehung zwischen ϕ^d und ϕ^* erhalten wir nun:

$\models \phi^d \leftrightarrow \psi^d$ und die Umkehrung folgt direkt mir $\phi^{dd} = \phi$ □