Einführung in die Prädikatenlogik

Chayenna Klug

7. Oktober 2026

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe

Die Sprache $\mathscr{L}$ der Prädikatenlogik besteht aus folgenden Symbolen:

1. Logische Symbole
   (a) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$
   (b) Falsum $\bot$
   (c) 2-stellige Identitätsprädikat $=$
   (d) Abzählbar viele Variablen: $v_0, v_1, v_2, \ldots$
2. Nicht-logische Symbole
   (a) Abzählbar viele n-stellige Prädikatensymbole für jedes $n > 0$: $A_0^n, A_1^n, A_2^n, \ldots$
   (b) Abzählbar viele Konstantensymbole $c_0, c_1, c_2, \ldots$
   (c) Abzählbar viele n-stellige Funktionssymbole für jedes $n > 0$: $f_0^n, f_1^n, f_2^n, \ldots$
3. Satzzeichen: (,), Komma

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe

Beispiel

Die Sprache $\mathscr{L}_A$ der Arithmetik besteht aus einem 2-stelligen Prädikatensymbol $<$, einem Konstantensymbol O, eienem 1-stelligen Funktionssymbol $'$ und 2 2-stellige Funktionssymbole $+$ und $\times$. Genauer: die Symbole stehen für $A_0^2, c_0, f_0^1, f_0^2, f_1^2$

Syntax - Terme und Formeln

Für eine Sprache $\mathscr{L}$ definieren wir Ausdrücke Terme und Formeln:

Definition

Die Menge der Terme $\mathrm{Trm}(\mathscr{L})$ sind induktiv definiert:

1. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist v_i ein Term
2. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist c_i ein Term
3. Falls f ein n-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term
4. Sonst ist nichts ein Term

Syntax - Terme und Formeln

Definition

Die Menge der Formeln $\mathrm{Frm}(\mathscr{L})$ sind induktiv definiert:

1. $\bot$ ist eine atomare Formel
2. Für R ein n-stelliges Prädikatsymbol von $\mathscr{L}$ und $t_1, \ldots, t_n$ Terme von $\mathscr{L}$ ist $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel
3. Für t_1, t_2 Terme, ist $=(t_1, t_2)$ eine atomare Formel
4. Falls A eine Formel ist, so ist $\neg A$ eine Formel
5. Falls A, B Formeln sind, so ist $(A * B)$ eine Formel, wobei $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
6. Falls A eine Formel und x eine Variable ist, so sind $\forall x\ A$ und $\exists x\ A$ Formeln
7. Sonst ist nichts eine Formel

Syntax - Terme und Formeln

Konventionen

- $t_1 = t_2$ statt $= (t_1, t_2)$ und $t_1 \neq t_2$ statt $\neg = (t_1, t_2)$
- lassen Klammern weg z.B. $A \wedge B$ statt $(A \wedge B)$
- $\top$ ist Abkürzung für $\neg\bot$
- $A \leftrightarrow B$ als Abkürzung für $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- 2-stellige Prädikatensymbole und 2-stellige Funktionssymbole häufig zwischen den Termen z.B. in der Arithmetik:
  $t_1 < t_2,\ (t_1 + t_2),\ t'$

Definition (Syntaktische Identität)

Das Symbol $\equiv$ beschreibt die syntaktische Identität zwischen Ausdrücken, d.h. $A \equiv B$ genau dann wenn A und B Zeichenketten gleicher Länge sind und an jeder Stelle das gleiche Symbol steht.

Syntax - Freie Variablen

Definition (freie Variablen)

Die freien Variablen in einer Formel A werden induktiv definiert:

1. Für A atomar: Alle Variablen, die in A vorkommen, sind frei
2. Falls $A \equiv \neg B$: Freie Variablen von A sind genau die von B
3. Falls $A \equiv (B * C)$: freie Variablen von A sind genau die von B vereinigt mit denen von C (wobei $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$)
4. Falls $A \equiv \forall x\ B$ oder $A \equiv \exists x\ B$: freie Variablen von A sind genau alle aus B außer den Vorkommen von x

Definition (gebundene Variablen)

Ein Vorkommen einer Variable in einer Formel A ist gebunden, falls es nicht frei ist.

Definition (Satz)

Eine Formel A ist ein Satz, gdwenn sie keinen freien Variablen enthält.

Syntax - Freie Variablen

Definition (Wirkungsbereich)

Wenn $\forall x\ B$ in einer Formel A vorkommt, dann wird das Vorkommen von B in A als Bereich von $\forall x$ bezeichnet. Analog für $\exists$.

Ist B der Bereich eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$ in A, dann sind die freien Vorkommen von x in B gebunden in $\forall x\ B$ bzw. $\exists x\ B$. Man sagt, dass diese Vorkommen durch den Quantor gebunden werden.

Beispiel

$$\forall v_0 \underbrace{(A_0^1(v_0) \to A_0^2(v_0, v_1))}_{B} \to \exists v_1 \underbrace{(A_1^2(v_0, v_1) \vee \forall v_0 \overbrace{\neg A_1^1(v_0)}^{D})}_{C}$$

Semantik der Prädikatenlogik - Strukturen

Definition (Strukturen)

Eine Struktur M für eine Sprache $\mathscr{L}$ der erststufigen Logik besteht aus:

1. Domain: nicht-leere Menge $|M|$
2. Interpretation von Konstantensymbolen: Für jede Konstante c von $\mathscr{L}$, ein Element $c^M \in |M|$
3. Interpretation von Prädikatensymbolen: Für jedes n-stelliges Prädikat R von $\mathscr{L}$, eine n-stellige Relation $R^M \subseteq |M|^n$
4. Interpretation von Funktionssymbolen: Für jede n-stellige Funktion f von $\mathscr{L}$, eine n-stellige Funktion $f^M : |M|^n \to |M|$

Semantik der Prädikatenlogik - Strukturen

Beispiel

Standardmodell der Arithmetik ist folgende Struktur N:

1. $|N| = \mathbb{N}$
2. $\mathrm{O}^N = 0$
3. $'^N(n) = n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$
4. $+^N(n, m) = n + m$ für $n, m \in \mathbb{N}$
5. $\times^N(n, m) = n \cdot m$ für $n, m \in \mathbb{N}$
6. $<^N = \{\langle n, m\rangle : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n < m\}$

Semantik - Erfüllbarkeit von Formeln

Definition (Variablen-Belegung)

Eine Variablen-Belegung s für eine Struktur M ist eine Abbildung $s\colon \mathrm{Var} \to |M|$

Definition (Werte von Termen)

Sei t ein Term von Sprache $\mathscr{L}$, M eine Struktur von $\mathscr{L}$ und s eine Variablen-Belegung für M. Dann ist der Wert von Term t, $\mathrm{Val}_s^M(t)$:

1. $t \equiv c$: $\mathrm{Val}_s^M(t) = c^M$
2. $t \equiv x$: $\mathrm{Val}_s^M(t) = s(x)$
3. $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$: $\mathrm{Val}_s^M(t) = f^M(\mathrm{Val}_s^M(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_s^M(t_n))$

Semantik - Erfüllbarkeit von Formeln

Definition

Sei s eine Variablen-Belegung für eine Struktur M, $m \in |M|$. Dann ist die Variablen-Belegung $s[m/x]$ definiert durch:

$$s[m/x](y) = \begin{cases} m & \text{falls } y \equiv x \\ s(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik - Erfüllbarkeit von Formeln

Definition (Erfüllbarkeit)

Die Erfüllbarkeit von einer Formel A in Struktur M bzgl. Variablen-Belegung s; $M, s \models A$ ist so definiert:

1. $A \equiv \bot$: $M, s \not\models A$
2. $A \equiv R(t_1, \ldots, t_n)$: $M, s \models A \iff \langle \mathrm{Val}_s^M(t_1), \ldots, \mathrm{Val}_s^M(t_n) \rangle \in R^M$
3. $A \equiv t_1 = t_2$: $M, s \models A \iff \mathrm{Val}_s^m(t_1) = \mathrm{Val}_s^M(t_2)$
4. $A \equiv \neg B$: $M, s \models A \iff M, s \not\models B$
5. $A \equiv (B \wedge C)$: $M, s \models A \iff M, s \models B$ und $M, s \models C$
6. $A \equiv (B \vee C)$: $M, s \models A \iff M, s \models B$ oder $M, s \models C$
7. $A \equiv (B \to C)$: $M, s \models A \iff M, s \not\models B$ oder $M, s \models C$
8. $A \equiv \forall x B$: $M, s \models A \iff$ für jedes $m \in |M|$ gilt $M, s[m/x] \models B$
9. $A \equiv \exists x B$: $M, s \models A \iff$ es gibt $m \in |M|$ mit $M, s[m/x] \models B$

Semantik - Erfüllbarkeit von Formeln

Beispiel

Sei $\mathscr{L} = \{a, b, f, R\}$ wobei a, b Konstanten, f 2-stellige Funktion, R 2-stelliges Prädikat. Betrachte die Struktur M:

1. $|M| = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $a^M = 1,\ b^M = 2$
3. $f^M(x, y) = x + y$
4. $R^M = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$

und die Variablen-Belegung $s(x) = 1$ für jede Variable x. Dann $\mathrm{Val}_s^M(f(a, b)) = f^M(\mathrm{Val}_s^M(a), \mathrm{Val}_s^M(b)) = f^M(a^M, b^M) = f^M(1, 2) = 1 + 2 = 3$

Eine Formel $R(t_1, t_2)$ is erfüllt gdwenn $\langle \mathrm{Val}_s^M(t_1), \mathrm{Val}_s^M(t_2)\rangle \in R^M$. So ist z.B. $M, s \models R(b, f(a, b))$, weil $\langle \mathrm{Val}_s^M(b), \mathrm{Val}_s^M(f(a, b))\rangle = \langle 2, 3\rangle \in R^M$ und $M, s \not\models R(x, f(a, b))$ weil $\langle \mathrm{Val}_s^M(x), \mathrm{Val}_s^M(f(a, b))\rangle = \langle 1, 3\rangle \notin R^M$

Semantik - Variablen Belegungen

Proposition

Falls die Variablen in Term t enthalten sind in $x_1, \ldots, x_n$ und $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, dann gilt $\mathrm{Val}^M_{s_1}(t) = \mathrm{Val}^M_{s_2}(t)$.

Beweis.

strukturelle Induktion über Aufbau von t.
IA: Falls $t = c$, dann $\mathrm{Val}^M_{s_1}(t) = c^M = \mathrm{Val}^M_{s_2}(t)$. Falls $t = x_i$ so gilt $\mathrm{Val}^M_{s_1}(t) = s_1(x_i) = s_2(x_i) = \mathrm{Val}^M_{s_2}(t)$
IS: Sei $t = f(t_1, \ldots, t_k)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}^M_{s_1}(t) &= \mathrm{Val}^M_{s_1}(f(t_1, \ldots, t_k)) \\
&= f^M(\mathrm{Val}^M_{s_1}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^M_{s_1}(t_k)) \\
&\overset{\text{IH}}{=} f^M(\mathrm{Val}^M_{s_2}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^M_{s_2}(t_k)) \\
&= \mathrm{Val}^M_{s_2}(f(t_1, \ldots, t_k)) = \mathrm{Val}^M_{s_2}(t)
\end{aligned}$$

Semantik - Variablen Belegungen

Proposition

Falls die freien Variablen einer Formel A enthalten sind in $x_1, \ldots, x_n$ und $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, dann $M, s_1 \models A \iff M, s_2 \models A$.

Beweis.

strukturelle Induktion über A.

IA: A atomar:

1. $A \equiv \bot$: $M, s_1 \not\models A$ und $M, s_2 \not\models A$
2. $A \equiv R(t_1, \ldots, t_k)$: Falls $M, s_1 \models A$, dann $\langle \mathrm{Val}^M_{s_1}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^M_{s_1}(t_k) \rangle \in R^M$. Mit voriger Prop. folgt $\langle \mathrm{Val}^M_{s_2}(t_1), \ldots, \mathrm{Val}^M_{s_2}(t_k) \rangle \in R^M$, d.h. $M, s_2 \models A$
3. $A \equiv t_1 = t_2$: Falls $M, s_1 \models A$, dann $\mathrm{Val}^M_{s_2}(t_1) = \mathrm{Val}^M_{s_1}(t_1) = \mathrm{Val}^M_{s_1}(t_2) = \mathrm{Val}^M_{s_2}(t_2)$. Also $M, s_2 \models t_1 = t_2$

Semantik - Variablen Belegungen

Proposition

Falls die freien Variablen einer Formel A enthalten sind in $x_1, \ldots, x_n$ und $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, dann $M, s_1 \models A \iff M, s_2 \models A$.

Beweis.

1. $A \equiv \neg B$: Falls $M, s_1 \models A$, dann $M, s_1 \not\models B$, dann folgt aus IH $M, s_2 \not\models B$, d.h. $M, s_2 \models A$
2. $A \equiv B \wedge C$: Falls $M, s_1 \models A \implies M, s_1 \models B$ und $M, s_1 \models C$. IH liefert $M, s_2 \models B$ und $M, s_2 \models C \implies M, s_2 \models A$
3. $A \equiv B \vee C$, $A \equiv B \to C$: analog
4. $A \equiv \exists x B$: Falls $M, s_1 \models A$, so ex. ein $m \in |M|$ mit $M, s_1[m/x] \models B$. Die freien Variablen von B sind enthalten in $x_1, \ldots, x_n, x$. Weil $s_1[m/x](x) = m = s_2[m/x](x)$ und nach Annahme $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ können wir die IH auf B und $s_1[m/x], s_2[m/x]$ anwenden. Es folgt $M, s_2[m/x] \models B$ und somit $M, s_2 \models A$
5. $A \equiv \forall x B$: Analog zu $\exists$

Semantik - Variablen Belegungen

Korollar

Sei A ein Satz und s eine Variablen-Belegung. Dann gilt
$M, s \models A \iff M, s' \models A$ für jede Variablen-Belegung.

Beweis.

Direkt aus voriger Proposition, denn Sätze haben keine freien Variablen. □

Das rechtfertigt:

Definition

Falls A ein Satz ist, sagen wir, dass die Struktur M A erfüllt,
$M \models A \iff M, s \models A$ für jede Variablen-Belegung s.

Semantik - Variablen Belegungen

Proposition

Sei M eine Struktur, A ein Satz und s eine Variablen-Belegung. Es gilt: $M \models A \iff M, s \models A$

Beweis.

$\Rightarrow$: vorige Definition

$\Leftarrow$: voriges Korollar und Definition $\square$

Proposition

Falls $A(x)$ als freie Variablen nur x hat und M eine Struktur ist, so gilt:

1. $M \models \exists x\, A(X) \iff M, s \models A(x)$ für eine Variablen-Belegung
2. $M \models \forall x\, A(x) \iff M, s \models A(x)$ für alle Variablen-Belegungen s