Aussagenlogik & Verknüpfungen

Definition 1: Sprachen der Aussagenlogik

(i) Aussagensymbolen: $p_1, p_2, \dots$
(ii) Verknüpfungen
(iii) Hilfssymbole (,)

Verknüpfungen:

(i) $\wedge$ – „und" – Konjunktion
(ii) $\vee$ – „oder" – Disjunktion
(iii) $\rightarrow$ – „falls ..., wenn ..." – Implikation
(iv) $\leftrightarrow$ – „genau dann, wenn.." – Äquivalenz
(v) $\neg$ – „nicht" – Negation
(vi) $\perp$ – „Falschheit"
(vii) $\top$ – „Wahrheit"

$\square$ repräsentiert Verknüpfungen (i) - (iv)

$(\neg p_1)$ $(p_1 \wedge p_2)$

Definition 2: Die Menge PROP

Die Menge PROP bezeichnet die <u>kleinste</u> Menge X mit folgenden Eigenschaften

(i) $p_i \in X \ \forall i$, $\perp \in X$
(ii) $\varphi, \psi \in X \Rightarrow (\varphi \square \psi) \in X$
(iii) $\varphi \in X \Rightarrow (\neg \varphi) \in X$

$$(\underbrace{\perp}_{\varphi} \vee \underbrace{(\neg \overset{x}{p_3})}_{\psi})$$

Satz Induktionprinzip

Sei A eine Eigenschaft, dann $A(\varphi)$ für $\varphi \in PROP$, wenn

(i) $A(p_i)$ $\forall i$, $A(\bot)$

(ii) $A(\varphi), A(\psi) \Rightarrow A(\varphi \,\square\, \psi)$

(iii) $A(\varphi) \Rightarrow A(\neg \varphi)$

Bew: Sei $X = \{ \varphi \in PROP \mid A(\varphi) \}$

offensichtlich $X \subseteq PROP$

zz $X \supseteq PROP$

X erfüllt die Eigenschaften von PROP

Beispiel Alle Aussagenformeln haben eine gerade Anzahl Klammern

(i) Jede atomare Aussage hat 0 Klammern

(ii) Angenommen φ und ψ haben jeweils $2n$ und $2m$

Dann hat $(\varphi \,\square\, \psi)$ $\underline{2(n+m+1)}$

(iii) Angenommen φ hat $2n$ Klammern, dann hat

$(\neg \varphi)$ $2(n+1)$ Klammern

Definition 4 Bildungsfolge

Eine Folge von Aussagenformeln heißt Bildungsfolge von φ falls $\underline{\varphi_n = \varphi}$ und $\forall i \leq n$ gilt:

(i) φ_i ist atomar

oder (ii) $\varphi_i = (\varphi_j \,\square\, \varphi_k)$ für $j, k < i$

oder (iii) $\varphi_i = (\neg \varphi_j)$ für $j < i$

Beispiel: Betrachte $\varphi = (\neg p_3)$

Folge A: $\varphi_0 = p_3$ $\quad \varphi_1 = (\neg p_3)$

Folge B: $\varphi_0 = \bot$ $\quad \varphi_3 = (\bot \vee p_2)$

$\varphi_1 = p_2$ $\quad \varphi_4 = (\neg(\bot \vee p_2))$

Folge B: $\varphi_0 = \bot$ $\quad \varphi_3 = (\bot \vee p_2)$

$\varphi_1 = p_2 \quad \varphi_4 = (\neg(\bot \vee p_2))$

$\varphi_2 = p_3 \quad \varphi_5 = (\neg p_3)$

<u>Satz:</u> PROP ist die Menge aller Ausdrücke, die Bildungsfolge haben

<u>Bew:</u> a) Alle $\varphi \in PROP$ haben eine Bildungsfolge

b) Für alle Ausdrücke φ, die eine Bildungsfolge haben gilt $\varphi \in PROP$

a) Beweis über Induktion

(i) Sei φ atomar, dann hat φ die Bildungsfolge $\varphi_0 = \varphi$

(ii) Seien $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ Bildungsfolge von φ

$\psi_0, \dots, \psi_n$ Bildungsfolge von ψ

Dann hat $(\varphi \square \psi)$ die Bildungsfolge

$\varphi_0, \dots, \varphi_n, \psi_0, \dots, \psi_n, (\varphi \square \psi)$

(iii) Sei $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ ist Bildungsfolge von φ

$(\neg \varphi)$ hat dann die Bildungsfolge

$\varphi_0, \dots, \varphi_n, (\neg \varphi)$

b) Sei $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ die Bildungsfolge von φ

Induktion über n:

Anfang: $n = 0$ $\quad \varphi = \varphi_0$ nach Definition ist φ eine atomare Aussage

Somit $\varphi \in PROP$

Annahme: Alle Ausdrücke mit Bildungsfolge der Länge $m < n$ sind in PROP enthalten

Nach Definition von Bildungsfolge

(i) φ_n atomar $\Rightarrow \varphi \in PROP$

(ii) $\varphi_n = (\varphi_i \square \varphi_j)$ für $i, j < n$ $\Rightarrow \varphi \in PROP$

(iii) $\varphi_n = (\neg \varphi_i)$ für $i < n$ $\Rightarrow \varphi \in PROP$

Definition 6: Teilformeln

Die Menge der Teilformeln $Sub(\varphi)$ einer Aussage φ ist gegeben durch

(i) $Sub(\varphi) = \{\varphi\}$, wenn φ atomar
(ii) $Sub(\varphi_1 \square \varphi_2) = Sub(\varphi_1) \cup Sub(\varphi_2) \cup \{(\varphi_1 \square \varphi_2)\}$
(iii) $Sub(\neg \varphi) = Sub(\varphi) \cup \{(\neg \varphi)\}$

Satz 7: Rekursionssatz

Sei H_{at} eine Funktion von der Menge der atomaren Aussagen in eine Menge $A \neq \emptyset$. Seien weiterhin $H_\square : A^2 \to A$ und $H_\neg : A \to A$ gegeben.

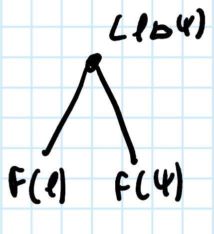
Dann gibt es genau eine Funktion $F : PROP \to A$ mit

(i) $F(\varphi) = H_{at}(\varphi)$, falls φ atomar
(ii) $F(\varphi \square \psi) = H_\square(F(\varphi), F(\psi))$
(iii) $F(\neg \varphi) = H_\neg(F(\varphi))$

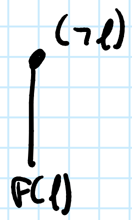
Beispiel 1 Aussagenbäume

$F(\varphi) =$ $\bullet\ \varphi$ wenn φ atomar

$F(\varphi \square \psi) =$

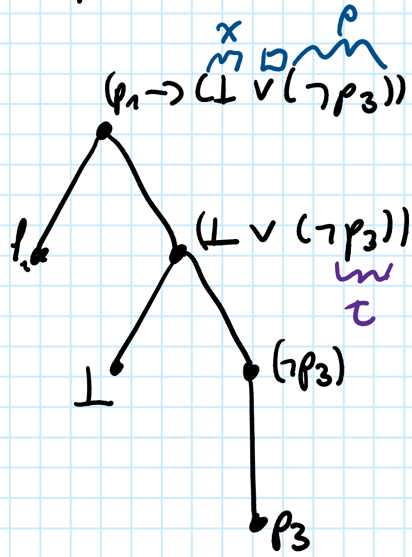


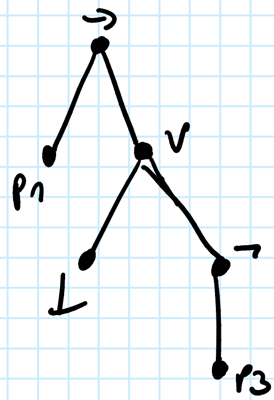
$F(\neg \varphi)$



$F((\underbrace{\varphi_1}_{\varphi} \overset{\square}{\rightarrow} \underbrace{(\bot \vee (\neg \varphi_2))}_{\psi}))$

$F((\overbrace{p_1}^{\varphi} \overset{\square}{\rightarrow} \overbrace{(\bot \vee (\neg p_3))}^{\psi}))$





Bew von Satz

a) Existenz   b) Eindeutigkeit

a) Existenz

Sei $F^* \subseteq A \times PROP$ die kleinste Menge, die folgendes erfüllt:

(i) $\forall\ \varphi \in PROP : \varphi$ atomar gilt: $\langle \varphi, H_{at}(\varphi) \rangle \in F^*$
(ii) Falls $\langle \varphi, a \rangle, \langle \psi, b \rangle \in F^*$, dann gilt $\langle (\varphi \square \psi), H_{\square}(a,b) \rangle \in F^*$
(iii) Falls $\langle \varphi, a \rangle \in F^*$, soll $\langle (\neg \varphi), H_{\neg}(a) \rangle \in F^*$

(i) $\forall\ \varphi \in PROP\ \ \exists\ a \in A$, s.d. $\langle \varphi, a \rangle \in F^*$
Beweis über Induktion

(ii) Dieses a ist für alle φ eindeutig bestimmt
Beweis über Induktion

Setze $F : PROP \rightarrow A,\ \varphi \mapsto a$, wenn $\langle \varphi, a \rangle \in F^*$

b) Eindeutigkeit

Seien F und G zwei Funktionen die die Eigenschaften vom Rekursionssatz haben zz. $\forall \varphi \in PROP$ gilt $F(\varphi) = G(\varphi)$

Beweis über Induktion

Beispiel 2 : Rang einer Aussagenformel

$r(\varphi) = 0$ für atomare φ

$r(\varphi \square \psi) = \max(r(\varphi), r(\psi)) + 1$

$r(\neg \varphi) = r(\varphi) + 1$

$H_{at} : X \to \mathbb{N}_0$

$H_\square : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$, $H_\square(a,b) = \max(a,b) + 1$

$H_\neg : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $H_\neg(a) = a + 1$

Notation:

$\varphi \prec \psi \Leftrightarrow r(\varphi) < r(\psi)$

$\varphi \preceq \psi \Leftrightarrow r(\varphi) \leq r(\psi)$

Satz 8 Induktion auf Rang-Prinzip

$$\left[\forall \varphi \in PROP : (\forall \psi \prec \varphi \; A(\psi) \Rightarrow A(\varphi))\right] \Rightarrow A(\varphi) \; \forall \varphi$$

Bew: Sei gegeben, dass

$$\forall \varphi \in PROP : (\forall \psi \prec \varphi \; A(\psi) \Rightarrow A(\varphi)) \quad (*)$$

Setzen $B(\varphi) := \forall \psi \preceq \varphi \; A(\psi)$

Wir zeigen, dass $\forall \varphi \; B(\varphi)$ durch Induktion

(i) Für atomare φ gilt $B(\varphi)$ trivialerweise

Nach $(*)$ gilt $A(\varphi)$

(ii) Sei $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$

Annahme: $B(\varphi_1)$ und $B(\varphi_2)$

Sei p eine beliebige Aussagenformel mit $r(p) = r(\varphi) = n+1$

zz. Für p und alle $\psi \prec p$ gilt Eigenschaft A

Es gilt $r(\varphi) = \max(r(\varphi_1), r(\varphi_2)) + 1 = n+1$ OBdA $r(\varphi_1) = n$

Sei ψ mit $r(\psi) \leq n$ beliebig, dann $\psi \preceq \varphi_1$

$B(l_1) \Rightarrow A(\psi)$ Nach (*) gilt $A(\rho)$

$\Rightarrow B(\ell)$

(iii) Analog zu (ii)

<u>Bemerkung zur Notation:</u>

Vereinfachungen:

- äußere Klammern werden weggelassen
- Klammern um Negationen werden weggelassen
- Verknüpfungen $\vee$ und $\wedge$ stärker sind als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$

Beispiel

$\neg \ell \wedge \ell$ steht $((\neg \ell) \wedge \ell)$

$\varphi \rightarrow (\varphi \vee (\psi \rightarrow \chi))$ steht für $(\varphi \rightarrow (\varphi \vee (\psi \rightarrow \chi)))$