Ebbinghaus Kapitel IX §1&§2.

§1 Vergleich von Mächtigkeiten in ZF

Definition 1.1

- $x \preceq y$: x ist höchstens so mächtig wie y $\Leftrightarrow \exists f: x \xrightarrow{inj} y$
- $x \prec y$: x ist schmächtiger als y $\Leftrightarrow x \preceq y$ und $\neg x \sim y$

Satz 1.2

$$x \sim x' \text{ und } y \sim y' \Rightarrow (x \preceq y \Leftrightarrow x' \preceq y') \text{ und } (x \prec y \Leftrightarrow x' \prec y')$$

Beispiel:

$f: x \sim x'$, $g: y \sim y'$, $h: x \preceq y$

$$g \circ h \circ f^{-1} : x' \preceq y'$$

Bemerkung 1.3

Für alle α, β gilt $\alpha \preceq \beta$ oder $\beta \preceq \alpha$. Daher $\alpha \prec \beta$ oder $\alpha \sim \beta$ oder $\beta \prec \alpha$

Satz 1.4

Ordnungseigenschaften $\preceq$

(i) $x \preceq x$

(ii) $x \preceq y \wedge y \preceq z \rightarrow x \preceq z$

(iii) $x \preceq y \wedge y \preceq x \rightarrow x \sim y$

(iv) $\forall xy \, (x \preceq y \vee y \preceq x) \Leftrightarrow AC$

Satz 1.5

$\prec$

(i) $\neg x \prec x$

(ii) $x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z$

(iii) $\forall x \, (x \prec y \vee x \sim y \vee y \prec x) \Leftrightarrow AC$

Satz 1.6 Satz von Cantor

Für alle x ist $x \prec Pot(x)$

Beweis:

z.zg. es gibt keine Surjektion

Ang. $f: x \xrightarrow{surj.} Pot(x)$. Dann ex. $z = \{u \in x \mid u \notin f(u)\}$

Sei $v \in x$ s.d. $f(v) = z$. Dann $v \in z$ und $v \notin z$ ↯

$\square$

Satz 1.7

$\forall \alpha \exists \beta \; \alpha \prec \beta$

Beweis: Hartogs: für alle x ex. a s.d. es kein f mit $f: a \xrightarrow{inj.} x$ gibt.

Wähle also β zu α s.d. es keine Inj. gibt. D.h. $\neg \beta \preccurlyeq \alpha$.

Definition 1.8 Aleph-Operation $\aleph_0$

- $\aleph_x = \emptyset$ falls x keine Ordinalzahl ist.
- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1}$ = kleinste γ mit $\aleph_\alpha \prec \gamma$
- $\aleph_\delta = \bigcup \{\aleph_\beta \mid \beta < \gamma\}$.

Anfangszahlen.

$$0 < 1 < 2 < \dots < \omega = \underbrace{\aleph_0 \sim \omega+1 \sim \omega+2}_{\text{erste Zahlklasse}} \sim \dots \prec \underbrace{\aleph_1 \sim \aleph_1 + 1 \sim}_{\text{zweite Zahlklasse}} \dots \prec \aleph_2 \dots$$

Satz 1.9

Für alle α, β äquivalent:

(i) $\alpha < \beta$ (ii) $X_\alpha < X_\beta$ (iii) $X_\alpha \prec X_\beta$

Beweis (i) $\Longrightarrow$ (ii) und (iii) $\circledast$

$\beta = 0$ ✓

Nachfolgeschritt: $\circledast$ für β. Ang $\beta \geq \alpha$. Dann $X_\alpha \leq X_\beta$ und $X_\beta \prec X_{\beta+1}$. Also $X_\alpha \prec X_{\beta+1}$. Dann $X_\alpha < X_{\beta+1}$

Limesschritt: $\circledast$ gelte für $\beta < \delta$.

Sei $\delta > \alpha$. Dann $\alpha + 1 < \delta$. $X_\alpha \prec X_{\alpha+1} \leq X_\delta$.

$\longrightarrow X_\alpha \prec X_{\alpha+1} \preceq X_\delta \Rightarrow X_\alpha \prec X_\delta$. $X_\alpha < X_\delta$. $\square$

Satz 1.10

(i) $\omega \leq \alpha \to \exists^{=1} \beta \ \alpha \sim \aleph_\beta$

(ii) $\alpha \sim \aleph_\beta \to \alpha \geq \aleph_\beta$

(iii) $\aleph_\alpha$ ist Limeszahl.

Beweis:

(i) $\omega \leq \alpha$. Dann ex $\{\gamma \mid \aleph_\gamma \leq \alpha\}$. Setze $\beta = \bigcup \{\gamma \mid \aleph_\gamma \leq \alpha\}$

Dann ist $\alpha \sim \aleph_\beta$.

(iii) $\omega \leq \alpha \to \alpha \sim S(\alpha)$ $\square$

Satz 1.11 Satz von Hessenberg

Für alle α ist $\aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$

Beweis: 127-129

§2 Kardinalzahlen

ZFC

$\Rightarrow$ Jede unendliche Menge ist zu einem Aleph gleichmächtig.

2.1 Definition Kardinalzahl

x heißt Kardinalzahl $\Leftrightarrow x \in \omega \vee \exists \alpha \; x = \aleph_\alpha$

Schreibe $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ für Kardinalzahlen.

Bemerkung 2.2

(i) $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa \prec \lambda$ (ii) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa \preceq \lambda$

Satz 2.3

$\forall x \exists^{=1} \kappa \quad x \sim \kappa$

"Mächtigkeit von x"

Definition 2.4 $|x| :=$ das κ mit $x \sim \kappa$

$$|x| := \begin{cases} \text{das } i \text{ mit } x \sim i & ; x \text{ endlich} \\ \text{das } \aleph_\alpha \text{ mit } x \sim \aleph_\alpha & ; x \text{ unendlich} \end{cases}$$

Satz 2.5

(i) $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$

(ii) $x \preceq y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$

(iii) $x \prec y \Leftrightarrow |x| < |y|$

2.6 Definition

(i) x heißt abzählbar $:\Leftrightarrow |x| \leq \aleph_0$

(ii) x heißt abzählbar unendlich $\Leftrightarrow |x| = \aleph_0$

(iii) x heißt überabzählbar $\Leftrightarrow |x| > \aleph_0$ / $|x| \geq \aleph_1$

Satz 2.7 Die Vereinigung von höchstens $\aleph_\alpha$-vielen Mengen einer Mächtigkeit $\leq \aleph_\alpha$ hat Mächtigkeit $\leq \aleph_\alpha$

$$|X| \leq \aleph_\alpha \wedge \forall y\,(y \in X \rightarrow |y| \leq \aleph_\alpha) \rightarrow |\bigcup X| \leq \aleph_\alpha$$

Beweis:

Sei $|X| \leq \aleph_\alpha$, $g: X \preccurlyeq \aleph_\alpha$. Für alle $y \in X$ sei $|y| \leq \aleph_\alpha$.

Dann $\{f \mid f: y \preccurlyeq \aleph_\alpha\} \neq \emptyset$. $\{\{f \in {}^y\aleph_\alpha \mid f \text{ inj}\} \mid y \in X\}$

h Auswahlfunktion auf $\quad h_y = h(\{f \in {}^y\aleph_\alpha \mid f \text{ inj}\})$ ist Inj. von y in $\aleph_\alpha$.

$f: \bigcup X \rightarrow \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, $z \longmapsto (\gamma_0, \gamma_1)$, γ_0 ist kleinste OZ mit $z \in g^{-1}(\gamma)$

$\gamma_1 = h_{g^{-1}(\gamma_0)}(z)$. Also $\bigcup X \lesssim \lambda_\alpha \times \lambda_\alpha \sim \lambda_\alpha$

$\square$

Definition 2.8

Kardinale Addition $\kappa + \mu = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})|$

Kardinale Multipl. $\kappa \cdot \mu = |\kappa \times \mu|$

Kardinale Exponent. $\kappa^{\mu} = |{}^{\mu}\kappa|$

Bemerkung 2.9

(i) $|x \cup y| \leq |x| + |y|$

(ii) $x \cap y = \emptyset$, dann $|x \cup y| = |x| + |y|$

$x \cup y$ unendlich, dann $|x \cup y| = |x| + |y| = \max\{|x|, |y|\}$

(iii) $|x \times y| = |x| \cdot |y|$

(iv) $|{}^{y}x| = |x|^{|y|}$

Beweis: $X \cup Y$ unendlich, dann $|X \cup Y| = |X| + |Y| = \max\{|X|, |Y|\}$

$X \cup Y$ unendlich, $|Y| \leq |X|$

$X \preceq X \cup Y \preceq (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) \preceq (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$

$\preceq X \times X \sim X$

$\Rightarrow X \sim |X \cup Y| \sim |X| + |Y| = \max\{|X|, |Y|\}$.

Bemerkung

- Kardinale Add. ist nicht für alle OZ definiert.
- Kardinale Add. ist kommutativ
- κ unendlich $\Rightarrow$ $\kappa + 1 = S(\kappa) = \kappa + 1 \sim \kappa$, $\kappa + 1 = \kappa$

  Schreibe κ^+

Satz 2.10 kard. Add. $\kappa+\mu = |(\kappa\times\{0\})\cup(\mu\times\{1\})|$

(i) + ist kommutativ und assoziativ.

(ii) $\mu \leq \nu \longrightarrow \kappa+\mu \leq \kappa+\nu$

(iii) $\kappa \geq \aleph_0 \rightarrow \kappa+\mu = \max\{\mu,\kappa\}$

Beweis zu (ii)

$$\mu \leq \nu \longrightarrow (\kappa\times\{0\})\cup(\mu\times\{1\}) \precsim (\kappa\times\{0\})\cup(\nu\times\{1\})$$

2.11 Kard. Multiplikation $\kappa \cdot \mu = |\kappa \times \mu|$

(i) • kommutativ und assoziativ

(ii) $\kappa \cdot (\mu + \nu) = (\kappa \cdot \mu) + (\kappa \cdot \nu)$

(iii) $\mu \leq \nu \Rightarrow \kappa \cdot \mu \leq \kappa \cdot \nu$

(iv) $\kappa \cdot 0 = 0$

(v) Mit $\kappa \geq \aleph_0$ und $\mu \neq 0$ ist $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.

<u>**Beweis**</u>

(iv) $\kappa \cdot 0 = \kappa \times \emptyset = \emptyset$

(v) Sei $\kappa \geq \aleph_0$ und $1 \leq \mu \leq \kappa$. Dann ist $\kappa \sim \kappa \times \{0\}$

$\preccurlyeq \kappa \times \mu \preccurlyeq \kappa \times \kappa \sim \kappa$

2.12. Kard. Exponentiation $\quad \kappa^\mu = |{}^\mu\kappa|$

(i) $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$ $\qquad$ (ii) $\kappa^{\mu\cdot\nu} = (\kappa^\mu)^\nu$

(iii) $(\kappa\cdot\lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$ $\qquad$ (iv) $\mu \leq \nu \Rightarrow \kappa^\mu \leq \kappa^\nu$ & $\mu^\kappa \leq \nu^\kappa$

(v) $0^0 = 1$ und $0^\kappa = 0$; $\kappa \neq 0$ $\qquad$ (vi) $\kappa^0 = 1$ und $\kappa^i = \kappa$; $i \neq 0$, $\kappa \geq \aleph_0$

(vii) $|Pot(x)| = 2^{|x|}$ $\qquad$ (viii) $\kappa \geq \aleph_0 \wedge 2 \leq \mu \leq \kappa \rightarrow \mu^\kappa = 2^\kappa$

<u>Beweis:</u>

(ii) Sei $\kappa^{\mu\cdot\nu} \sim {}^{\mu\nu}\kappa \sim {}^{\mu\times\nu}\kappa \overset{\circledast}{\sim} {}^\nu({}^\mu\kappa)$

$\circledast$ ordne $f = \{((\alpha,\beta), f(\alpha,\beta)) \mid \alpha\in\mu, \beta\in\nu\} \in {}^{\mu\times\nu}\kappa$

$$g = \{(\beta, \{(\alpha, f(\alpha,\beta)) \mid \alpha\in\mu\})\} \in {}^\nu({}^\mu\kappa) \text{ zu}$$

$$g(\beta)(\alpha) = f(\alpha,\beta)$$

(vi) $\kappa^0 = 1$ und $\kappa^i = \kappa$; $i \neq 0$, $\kappa \geq \aleph_0$

$\kappa^0 = {}^{\emptyset}\kappa = \{\emptyset\} \Rightarrow \kappa^0 = 1$

$\kappa^1 \sim {}^{\{\emptyset\}}\kappa \Rightarrow \kappa^1 = \kappa$

Sei nun. $\kappa^i = \kappa \Rightarrow \kappa^{i+1} = \kappa^i \cdot \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$

(viii) $\kappa \geq \aleph_0 \wedge 2 \leq \mu \leq \kappa \Rightarrow \mu^\kappa = 2^\kappa$

$2^\kappa \leq \mu^\kappa \leq \kappa^\kappa \leq |\mathrm{Pot}(\kappa)|^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa \leq 2^{\kappa \cdot \kappa} \leq 2^\kappa$

Korollar 2.13

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max\{\alpha, \beta\}}$$

$$\aleph_1 + \aleph_2 = \aleph_1 \cdot \aleph_2 = \aleph_2$$

Satz 2.14

(i) $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$

(ii) $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

<u>Satz 2.15</u>

(i) $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

(ii) $|\{x \in Pot(\mathbb{R}) \mid x \text{ offen}\}| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

<u>Beweis</u>: (1) $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$

$\ulcorner$ $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(r) = \begin{cases} 0 & ; r = 0 \\ \frac{1}{r+1} & ; r > 0 \\ \frac{1}{r-1} & ; r < 0 \end{cases} \qquad g(r) = \frac{r+1}{2}$$

$g \circ f$ Bijektion von $(0,1)$ in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \sim (0,1)$. Ordne $x \in (0,1)$ Dualdarstellung zu. Das gibt

$(0,1) \preceq {}^{\aleph_0}2$ $\lrcorner$

(2) $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$

$\ulcorner$ $f \in {}^{\aleph_0}2 \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{2^{2i+1}}$ $\lrcorner$

(ii) $|\{x \in \mathrm{Pot}(\mathbb{R}) \mid x \text{ offen}\}| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

Beweis: $\kappa = |\{x \in \mathrm{Pot}(\mathbb{R}) \mid x \text{ offen}\}|$.

- $g: \mathbb{R} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{R})$

  $r \mapsto (r-1, r+1)$. D.h. $|\mathbb{R}| \leq \kappa$

- z.zg. $\kappa \leq |\mathrm{Pot}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+)|$

  $\omega \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \longmapsto \bigcup \{(\tau - \sigma, \tau + \sigma) \mid (\tau, \sigma) \in \omega\}$

  ist Surj. von $\mathrm{Pot}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+)$ nach $\{x \in \mathrm{Pot}(\mathbb{R}) \mid x \text{ offen}\}$.

$\Rightarrow \kappa \leq |\mathrm{Pot}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+)|$

$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^+| = \aleph_0$

$\Rightarrow \kappa \leq 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$

$\square$