Mudjib Taher

Overleaf

2025

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.1: Ein *Vokabular* $\mathcal{L}$ ist gegeben durch ein Quintupel $(\mathcal{F},\mathcal{R},\mathcal{C},n_R,n_f)$, wobei:

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.1: Ein *Vokabular* $\mathcal{L}$ ist gegeben durch ein Quintupel $(\mathcal{F},\mathcal{R},\mathcal{C},n_R,n_f)$, wobei:

i) $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionsymbolen und für jedes $f \in \mathcal{F}$ n_f eine natürliche Zahl ist;

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.1: Ein *Vokabular* $\mathcal{L}$ ist gegeben durch ein Quintupel $(\mathcal{F},\mathcal{R},\mathcal{C},n_R,n_f)$, wobei:

i) $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionsymbolen und für jedes $f \in \mathcal{F}$ n_f eine natürliche Zahl ist;

ii) $\mathcal{R}$ eine Menge von Relationsymbolen und für jedes $R \in \mathcal{R}$ n_R eine natürliche Zahl ist;

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.1: Ein *Vokabular* $\mathcal{L}$ ist gegeben durch ein Quintupel $(\mathcal{F},\mathcal{R},\mathcal{C},n_R,n_f)$, wobei:

i) $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionsymbolen und für jedes $f \in \mathcal{F}$ n_f eine natürliche Zahl ist;

ii) $\mathcal{R}$ eine Menge von Relationsymbolen und für jedes $R \in \mathcal{R}$ n_R eine natürliche Zahl ist;

iii) $\mathcal{C}$ eine Menge von Konstanten ist.

n_R und n_f geben uns die Stelligkeit an.

Def. 1.1.2: Eine $\mathcal{L} - Struktur$ $\mathcal{M}$ besteht aus einer Menge M, sodass:

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.2: Eine $\mathcal{L}-$ *Struktur* $\mathcal{M}$ besteht aus einer Menge M, sodass:

i) $M \neq \emptyset$ *(genannt Definitionsmenge oder Universum)*

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.2: Eine $\mathcal{L} - \textit{Struktur}\ \mathcal{M}$ besteht aus einer Menge M, sodass:

i) $M \neq \emptyset$ *(genannt Definitionsmenge oder Universum)*

ii) $\forall c \in \mathcal{C}\ c^{\mathcal{M}} \in M$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.2: Eine $\mathcal{L} - \textit{Struktur}\ \mathcal{M}$ besteht aus einer Menge M, sodass:

i) $M \neq \emptyset$ *(genannt Definitionsmenge oder Universum)*

ii) $\forall c \in \mathcal{C}\ c^{\mathcal{M}} \in M$

iii) $\forall f \in \mathcal{F}$ ist $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$ eine Funktion

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.2: Eine $\mathcal{L} - Struktur\ \mathcal{M}$ besteht aus einer Menge M, sodass:

i) $M \neq \emptyset$ *(genannt Definitionsmenge oder Universum)*

ii) $\forall c \in \mathcal{C}\ c^{\mathcal{M}} \in M$

iii) $\forall f \in \mathcal{F}$ ist $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$ eine Funktion

iv) $\forall R \in \mathcal{R}$ ist $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$

Def. 1.1.2: Eine $\mathcal{L} - Struktur$ $\mathcal{M}$ besteht aus einer Menge M, sodass:

i) $M \neq \emptyset$ *(genannt Definitionsmenge oder Universum)*

ii) $\forall c \in \mathcal{C}\ c^{\mathcal{M}} \in M$

iii) $\forall f \in \mathcal{F}$ ist $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$ eine Funktion

iv) $\forall R \in \mathcal{R}$ ist $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$

$c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$ und $R^{\mathcal{M}}$ heißen die Interpretation von c, f, R.

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.4: Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Variablen. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Termen* ist die kleinste Menge $\mathcal{T}$, sodass:

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.4: Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Variablen. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Termen* ist die kleinste Menge $\mathcal{T}$, sodass:

i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

Def. 1.1.4: Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Variablen. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Termen* ist die kleinste Menge $\mathcal{T}$, sodass:

i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

ii) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.4: Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Variablen. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Termen* ist die kleinste Menge $\mathcal{T}$, sodass:

i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

ii) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$

iii) $f \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T} \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.4: Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Variablen. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Termen* ist die kleinste Menge $\mathcal{T}$, sodass:

i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

ii) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$

iii) $f \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T} \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$

Man kann t in $\mathcal{M}$ mit einer Belegung $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M$ interpretieren. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-*Struktur* und t ein Term mit Variablen $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$. Für Unterterme s von t kann man induktiv definieren:

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.4: Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Variablen. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Termen* ist die kleinste Menge $\mathcal{T}$, sodass:

i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

ii) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$

iii) $f \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T} \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$

Man kann t in $\mathcal{M}$ mit einer Belegung $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M$ interpretieren. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-*Struktur* und t ein Term mit Variablen $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$. Für Unterterme s von t kann man induktiv definieren:

i) Ist s eine Konstante c, so ist $s^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = c^{\mathcal{M}}$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.4: Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Variablen. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Termen* ist die kleinste Menge $\mathcal{T}$, sodass:

i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

ii) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$

iii) $f \in \mathcal{F}$ und $t_1, \ldots, t_{n_f} \in \mathcal{T} \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$

Man kann t in $\mathcal{M}$ mit einer Belegung $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M$ interpretieren. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-*Struktur* und t ein Term mit Variablen $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$. Für Unterterme s von t kann man induktiv definieren:

i) Ist s eine Konstante c, so ist $s^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = c^{\mathcal{M}}$

ii) Ist s eine Variable v_{i_j}, so ist $s^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = a_{i_j}$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.4: Sei $\mathcal{X}$ eine Menge von Variablen. Die Menge aller $\mathcal{L}$-*Termen* ist die kleinste Menge $\mathcal{T}$, sodass:

i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

ii) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$

iii) $f \in \mathcal{F}$ und $t_1, \dots, t_{n_f} \in \mathcal{T} \Rightarrow f(t_1, \dots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$

Man kann t in $\mathcal{M}$ mit einer Belegung $\bar{a} = (a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \in M$ interpretieren. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-*Struktur* und t ein Term mit Variablen $(v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$. Für Unterterme s von t kann man induktiv definieren:

i) Ist s eine Konstante c, so ist $s^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = c^{\mathcal{M}}$

ii) Ist s eine Variable v_{i_j}, so ist $s^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = a_{i_j}$

iii) Ist s der Term $f(t_1, \dots, t_{n_f})$, f Funktion und $t_1, \dots, t_{n_f}$ Terme, so ist $s^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \dots, t_{n_f}^{\mathcal{M}}(\bar{a}))$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.5: Wir sagen ϕ ist eine *atomare $\mathcal{L}$-Formel*, wenn ϕ entweder

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.5: Wir sagen ϕ ist eine *atomare $\mathcal{L}$-Formel*, wenn ϕ entweder

i) $t_1 = t_2$, t_1, t_2 Terme, oder

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.5: Wir sagen ϕ ist eine *atomare $\mathcal{L}$-Formel*, wenn ϕ entweder

i) $t_1 = t_2$, t_1, t_2 Terme, oder

ii) $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, $R \in \mathcal{R}$ und $t_1, \ldots, t_{n_R}$ Terme.

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.5: Wir sagen ϕ ist eine *atomare $\mathcal{L}$-Formel*, wenn ϕ entweder

i) $t_1 = t_2$, t_1, t_2 Terme, oder

ii) $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, $R \in \mathcal{R}$ und $t_1, \ldots, t_{n_R}$ Terme.

Die Menge aller *$\mathcal{L}$-Formeln* ist die kleinste Menge $\mathcal{W}$, die alle atomaren Formeln enthält, sodass gilt:

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.5: Wir sagen ϕ ist eine *atomare $\mathcal{L}$-Formel*, wenn ϕ entweder

i) $t_1 = t_2$, t_1, t_2 Terme, oder

ii) $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, $R \in \mathcal{R}$ und $t_1, \ldots, t_{n_R}$ Terme.

Die Menge aller *$\mathcal{L}$-Formeln* ist die kleinste Menge $\mathcal{W}$, die alle atomaren Formeln enthält, sodass gilt:

i) $\phi \in \mathcal{W} \Rightarrow \neg\phi \in \mathcal{W}$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.5: Wir sagen ϕ ist eine *atomare $\mathcal{L}$-Formel*, wenn ϕ entweder

i) $t_1 = t_2$, t_1, t_2 Terme, oder

ii) $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, $R \in \mathcal{R}$ und $t_1, \ldots, t_{n_R}$ Terme.

Die Menge aller *$\mathcal{L}$-Formeln* ist die kleinste Menge $\mathcal{W}$, die alle atomaren Formeln enthält, sodass gilt:

i) $\phi \in \mathcal{W} \Rightarrow \neg\phi \in \mathcal{W}$

ii) ϕ und $\psi \in \mathcal{W} \Rightarrow \phi \wedge \psi \in \mathcal{W}$ und $\phi \vee \psi \in \mathcal{W}$

Def. 1.1.5: Wir sagen ϕ ist eine *atomare $\mathcal{L}$-Formel*, wenn ϕ entweder

i) $t_1 = t_2$, t_1, t_2 Terme, oder

ii) $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, $R \in \mathcal{R}$ und $t_1, \ldots, t_{n_R}$ Terme.

Die Menge aller *$\mathcal{L}$-Formeln* ist die kleinste Menge $\mathcal{W}$, die alle atomaren Formeln enthält, sodass gilt:

i) $\phi \in \mathcal{W} \Rightarrow \neg\phi \in \mathcal{W}$

ii) ϕ und $\psi \in \mathcal{W} \Rightarrow \phi \wedge \psi \in \mathcal{W}$ und $\phi \vee \psi \in \mathcal{W}$

iii) $\phi \in \mathcal{W} \Rightarrow \exists v_i\phi$ und $\forall v_i\phi \in \mathcal{W}$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.5: Wir sagen ϕ ist eine *atomare $\mathcal{L}$-Formel*, wenn ϕ entweder

i) $t_1 = t_2$, t_1, t_2 Terme, oder

ii) $R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, $R \in \mathcal{R}$ und $t_1, \ldots, t_{n_R}$ Terme.

Die Menge aller *$\mathcal{L}$-Formeln* ist die kleinste Menge $\mathcal{W}$, die alle atomaren Formeln enthält, sodass gilt:

i) $\phi \in \mathcal{W} \Rightarrow \neg\phi \in \mathcal{W}$

ii) ϕ und $\psi \in \mathcal{W} \Rightarrow \phi \wedge \psi \in \mathcal{W}$ und $\phi \vee \psi \in \mathcal{W}$

iii) $\phi \in \mathcal{W} \Rightarrow \exists v_i \phi$ und $\forall v_i \phi \in \mathcal{W}$

Wir sagen eine Variable v *kommt frei* in einer Formel ϕ *vor*, wenn sie nicht in der Form $\exists v$ oder $\forall v$ vorliegt. Wenn das gilt, so bezeichnen wir v *gebunden*. Hat ϕ keine freien Variablen, so ist ϕ eine Aussage.

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

i) Ist $\phi \equiv (t_1 = t_2)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

i) Ist $\phi \equiv (t_1 = t_2)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$

ii) Ist $\phi \equiv R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, t_{n_R}^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

i) Ist $\phi \equiv (t_1 = t_2)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$

ii) Ist $\phi \equiv R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, so gilt
$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, t_{n_R}^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}$

iii) Ist $\phi \equiv \neg\psi$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

i) Ist $\phi \equiv (t_1 = t_2)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$

ii) Ist $\phi \equiv R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, t_{n_R}^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}$

iii) Ist $\phi \equiv \neg\psi$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$

iv) Ist ϕ $(\psi \wedge \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

i) Ist $\phi \equiv (t_1 = t_2)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$

ii) Ist $\phi \equiv R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, t_{n_R}^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}$

iii) Ist $\phi \equiv \neg\psi$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$

iv) Ist ϕ $(\psi \wedge \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

v) Ist $\phi \equiv (\psi \vee \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ oder $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

i) Ist $\phi \equiv (t_1 = t_2)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$

ii) Ist $\phi \equiv R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, t_{n_R}^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}$

iii) Ist $\phi \equiv \neg\psi$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$

iv) Ist ϕ $(\psi \wedge \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

v) Ist $\phi \equiv (\psi \vee \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ oder $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

vi) Ist $\phi \equiv \exists v_j\, \psi(\bar{v}, v_j)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{M}$ sodass $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, b)$

1.1 Sprache und Struktur

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

i) Ist $\phi \equiv (t_1 = t_2)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$

ii) Ist $\phi \equiv R(t_1, \dots, t_{n_R})$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \dots, t_{n_R}^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}$

iii) Ist $\phi \equiv \neg\psi$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$

iv) Ist ϕ $(\psi \wedge \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

v) Ist $\phi \equiv (\psi \vee \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ oder $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

vi) Ist $\phi \equiv \exists v_j\, \psi(\bar{v}, v_j)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{M}$ sodass $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, b)$

vii) Ist $\phi \equiv \forall v_j\, \psi(\bar{v}, v_j)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \forall b \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, b)$

Def. 1.1.6: Sei ϕ eine Formel mit freien Variablen aus der Menge $\bar{v} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ und sei $\bar{a} = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}) \in M^m$. Induktiv definieren wir $\mathcal{M} \models \phi()\bar{a}$:

i) Ist $\phi \equiv (t_1 = t_2)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\bar{a})$

ii) Ist $\phi \equiv R(t_1, \ldots, t_{n_R})$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \ldots, t_{n_R}^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}$

iii) Ist $\phi \equiv \neg\psi$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$

iv) Ist ϕ $(\psi \wedge \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

v) Ist $\phi \equiv (\psi \vee \theta)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ oder $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$

vi) Ist $\phi \equiv \exists v_j\, \psi(\bar{v}, v_j)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{M}$ sodass $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, b)$

vii) Ist $\phi \equiv \forall v_j\, \psi(\bar{v}, v_j)$, so gilt $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) :\Leftrightarrow \forall b \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, b)$

Def. 1.1.9: Wir sagen zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind *elementar Äquivalent* $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, wenn

$$\mathcal{M} \models \phi \iff \mathcal{N} \models \phi$$

für alle $\mathcal{L}$-Aussagen.
Sei $Th(\mathcal{M})$, die *vollständige Theorie von* $\mathcal{M}$, die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen ϕ, sodass $\mathcal{M} \models \phi$. Es ist einfach zu sehen, dass $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \iff Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.

1.2 Theorien

Sei $\mathcal{L}$ ein Vokabular. Eine *$\mathcal{L}$-Theorie* T ist eine Menge an $\mathcal{L}$-Aussagen. Wir sagen $\mathcal{M}$ ist ein *Modell von T* und schreiben $\mathcal{M} \models T$, wenn für alle $\phi \in T$ gilt $\mathcal{M} \models \phi$.

1.2 Theorien

Sei $\mathcal{L}$ ein Vokabular. Eine *$\mathcal{L}$-Theorie* T ist eine Menge an $\mathcal{L}$-Aussagen. Wir sagen $\mathcal{M}$ ist ein *Modell von T* und schreiben $\mathcal{M} \models T$, wenn für alle $\phi \in T$ gilt $\mathcal{M} \models \phi$.
Die Menge $\{\forall x \quad x = 0, \exists x \quad x \neq 0\}$ ist eine Theorie, da sie jedoch zwei Widersprüchliche Aussagen enthält, gibt es kein Modell für diese Theorie. Gibt es ein solches Modell zu einer Theorie T, so sagen wir T ist *erfüllbar (satisfiable)*

1.2 Theorien

Sei $\mathcal{L}$ ein Vokabular. Eine *$\mathcal{L}$-Theorie* T ist eine Menge an $\mathcal{L}$-Aussagen. Wir sagen $\mathcal{M}$ ist ein *Modell von T* und schreiben $\mathcal{M} \models T$, wenn für alle $\phi \in T$ gilt $\mathcal{M} \models \phi$.
Die Menge $\{\forall x \;\; x = 0, \exists x \;\; x \neq 0\}$ ist eine Theorie, da sie jedoch zwei Widersprüchliche Aussagen enthält, gibt es kein Modell für diese Theorie. Gibt es ein solches Modell zu einer Theorie T, so sagen wir T ist *erfüllbar (satisfiable)*
Eine Möglichkeit, eine Theorie zu erhalten, besteht darin, $Th(\mathcal{M})$, die volle Theorie einer Ł-Struktur $\mathcal{M}$, zu betrachten.

1.2 Theorien

Definition 1.2.12 Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und φ ein $\mathcal{L}$-Satz. Wir sagen, dass φ eine *logische Konsequenz* von T ist, und schreiben

$$T \models \phi$$

falls für jedes Modell $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models T$ auch $\mathcal{M} \models \phi$ gilt.

2.1 Kompaktheits Satz

Um zu zeigen, dass für eine Theorie T und eine $\mathcal{L}$-Aussage ϕ $T \models \phi$ gilt, kann man es mit einem logischen Beweis zeigen. (Wirkt Trivial, jedoch musste die Technik des Beweises erst noch definiert werden).

2.1 Kompaktheits Satz

Um zu zeigen, dass für eine Theorie T und eine $\mathcal{L}$-Aussage ϕ $T \models \phi$ gilt, kann man es mit einem logischen Beweis zeigen. (Wirkt Trivial, jedoch musste die Technik des Beweises erst noch definiert werden).
Ein Beweis von ϕ von T ist eine endliche Folge von $\mathcal{L}$-Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_m, \phi$ mit $\psi_i \in T$ oder ψ_i resultiert aus $\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}$ mit speziellen Regeln.

2.1 Kompaktheits Satz

Um zu zeigen, dass für eine Theorie T und eine $\mathcal{L}$-Aussage ϕ $T \models \phi$ gilt, kann man es mit einem logischen Beweis zeigen. (Wirkt Trivial, jedoch musste die Technik des Beweises erst noch definiert werden).

Ein Beweis von ϕ von T ist eine endliche Folge von $\mathcal{L}$-Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_m, \phi$ mit $\psi_i \in T$ oder ψ_i resultiert aus $\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}$ mit speziellen Regeln.

Wir schreiben $T \vdash \phi$.

2.1 Kompaktheits Satz

Um zu zeigen, dass für eine Theorie T und eine $\mathcal{L}$-Aussage ϕ $T \models \phi$ gilt, kann man es mit einem logischen Beweis zeigen. (Wirkt Trivial, jedoch musste die Technik des Beweises erst noch definiert werden).
Ein Beweis von ϕ von T ist eine endliche Folge von $\mathcal{L}$-Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_m, \phi$ mit $\psi_i \in T$ oder ψ_i resultiert aus $\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}$ mit speziellen Regeln.
Wir schreiben $T \vdash \phi$. Wir gehen nicht in die Details fürs Beweisen ein. Wichtig ist, dass

2.1 Kompaktheits Satz

Um zu zeigen, dass für eine Theorie T und eine $\mathcal{L}$-Aussage ϕ $T \models \phi$ gilt, kann man es mit einem logischen Beweis zeigen. (Wirkt Trivial, jedoch musste die Technik des Beweises erst noch definiert werden).
Ein Beweis von ϕ von T ist eine endliche Folge von $\mathcal{L}$-Formeln $\psi_1, \dots, \psi_m, \phi$ mit $\psi_i \in T$ oder ψ_i resultiert aus $\psi_1, \dots, \psi_{i-1}$ mit speziellen Regeln.
Wir schreiben $T \vdash \phi$. Wir gehen nicht in die Details fürs Beweisen ein. Wichtig ist, dass

- Beweise sind endlich
- (Korrektheit) Wenn $T \vdash \phi$, dann $T \models \phi$
- Ist T eine endliche Menge von Aussagen, dann gibt es einen Algorithmus, der für eine gegebene Folge von $\mathcal{L}$-Formeln σ und einer $\mathcal{L}$-Aussage ϕ entscheidet, ob σ ein Beweis für ϕ ist.

2.1 Kompaktheits Satz

Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist *rekursiv*, wenn ein Algorithmus existiert, der entscheidet, ob eine Anreihung von Symbolen eine $\mathcal{L}$-Formel ist.

2.1 Kompaktheits Satz

Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist *rekursiv*, wenn ein Algorithmus existiert, der entscheidet, ob eine Anreihung von Symbolen eine $\mathcal{L}$-Formel ist. Wir sagen eine $\mathcal{L}$-Theorie T ist rekursiv, wenn ein Algorithmus existiert, der entscheidet, ob eine $\mathcal{L}$-Aussage ϕ in T ist.

2.1 Kompaktheits Satz

Proposition 2.1.1: Ist $\mathcal{L}$ eine rekursive Sprache und T eine $\mathcal{L}$-Theorie, so ist $\{\phi : T \vdash \phi\}$ rekursiv auzählbar. Das heißt es gibt einen Algorithmus, der für eine gegebene Formel ϕ hält, falls $T \vdash \phi$, und nicht hält, falls $t \nvdash \phi$.

2.1 Kompaktheits Satz

Proposition 2.1.1: Ist $\mathcal{L}$ eine rekursive Sprache und T eine $\mathcal{L}$-Theorie, so ist $\{\phi : T \vdash \phi\}$ rekursiv auzählbar. Das heißt es gibt einen Algorithmus, der für eine gegebene Formel ϕ hält, falls $T \vdash \phi$, und nicht hält, falls $t \not\vdash \phi$.

Beweis.

Es gibt $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, eine berechenbare Aufzählung aller endlichen Folgen von L-Formeln. In Schritt i unseres Algorithmus überprüfen wir, ob σ_i ein Beweis von φ aus T ist. Dies beinhaltet die Überprüfung, dass jede Formel entweder in T enthalten ist (was wir überprüfen können, da T rekursiv ist) oder sich durch eine logische Regel aus früheren Formeln in der Folge σ_i ergibt, und dass die letzte Formel φ ist. Falls σ_i ein Beweis von φ aus T ist, halten wir an und akzeptieren; andernfalls gehen wir zu Schritt $i+1$ über. $\square$

2.1 Kompaktheits Satz

Satz 2.1.2 (Gödel's Vollständigkeitssatz): Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel. Dann gilt $T \models \phi$ genau dann, wenn $T \vdash \phi$.

2.1 Kompaktheits Satz

Satz 2.1.2 (Gödel's Vollständigkeitssatz): Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel. Dann gilt $T \models \phi$ genau dann, wenn $T \vdash \phi$.

Wir sagen eine $\mathcal{L}$-Theorie is *widersprüchlich* oder *inkonsistent*, wenn für eine Aussage ϕ gilt, dass $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$; gegenteilig sagen wir T ist *konsistent* oder *widerspruchsfrei*.

2.1 Kompaktheits Satz

Satz 2.1.2 (Gödel's Vollständigkeitssatz): Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel. Dann gilt $T \models \phi$ genau dann, wenn $T \vdash \phi$.

Wir sagen eine $\mathcal{L}$-Theorie is *widersprüchlich* oder *inkonsistent*, wenn für eine Aussage ϕ gilt, dass $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$; gegenteilig sagen wir T ist *konsistent* oder *widerspruchsfrei*.
Da unser Beweissystem korrekt ist, ist jede erfüllbare Theorie auch konsistent. Die Umkehrung impliziert Gödel.

Satz 2.1.2 (Gödel's Vollständigkeitssatz): Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel. Dann gilt $T \models \phi$ genau dann, wenn $T \vdash \phi$.

Wir sagen eine $\mathcal{L}$-Theorie is *widersprüchlich* oder *inkonsistent*, wenn für eine Aussage ϕ gilt, dass $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$; gegenteilig sagen wir T ist *konsistent* oder *widerspruchsfrei*.
Da unser Beweissystem korrekt ist, ist jede erfüllbare Theorie auch konsistent. Die Umkehrung impliziert Gödel.

2.1 Kompaktheits Satz

Korolar 2.1.3: T ist konsistent genau dann, wenn T erfüllbar ist.

2.1 Kompaktheits Satz

Korolar 2.1.3: T ist konsistent genau dann, wenn T erfüllbar ist.

Beweis.

" $\Leftarrow$ " gilt ja bereits. Also nur noch die anderen Richtung zu zeigen.

2.1 Kompaktheits Satz

Korolar 2.1.3: T ist konsistent genau dann, wenn T erfüllbar ist.

Beweis.

" $\Leftarrow$ " gilt ja bereits. Also nur noch die anderen Richtung zu zeigen.

Angenommen T ist nicht erfüllbar. Also ist jedes Modell von T auch ein Modell von $(\phi \wedge \neg\phi)$. Demnach gilt $T \models (\phi \wedge \neg\phi)$ und nach Gödel gilt auch $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$. □

2.1 Kompaktheits Satz

Korolar 2.1.3: T ist konsistent genau dann, wenn T erfüllbar ist.

Beweis.
" $\Leftarrow$ " gilt ja bereits. Also nur noch die anderen Richtung zu zeigen.
Angenommen T ist nicht erfüllbar. Also ist jedes Modell von T auch ein Modell von $(\phi \wedge \neg\phi)$. Demnach gilt $T \models (\phi \wedge \neg\phi)$ und nach Gödel gilt auch $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$. □

Eine Konsequenz davon ist der folgende Satz.

2.1 Kompaktheits Satz

Satz 2.1.4 (Kompaktheitssatz): T ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.

2.1 Kompaktheits Satz

Satz 2.1.4 (Kompaktheitssatz): T ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.

Beweis.
" $\Rightarrow$ " Ist ja wieder offensichtlich, da wenn T widerspruchsfrei ist, so ist auch jede Teilmenge widerspruchsfrei. Also nur noch Gegenrichtung zu zeigen.

2.1 Kompaktheits Satz

Satz 2.1.4 (Kompaktheitssatz): T ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.

Beweis.

" $\Rightarrow$ " Ist ja wieder offensichtlich, da wenn T widerspruchsfrei ist, so ist auch jede Teilmenge widerspruchsfrei. Also nur noch Gegenrichtung zu zeigen.
Angenommen T ist nicht erfüllbar. Dann ist T auch inkonsistent. Sei σ eine Beweisfolge, die zu einem Widerspruch führt.

2.1 Kompaktheits Satz

Satz 2.1.4 (Kompaktheitssatz): T ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.

Beweis.
" $\Rightarrow$ " Ist ja wieder offensichtlich, da wenn T widerspruchsfrei ist, so ist auch jede Teilmenge widerspruchsfrei. Also nur noch Gegenrichtung zu zeigen.
Angenommen T ist nicht erfüllbar. Dann ist T auch inkonsistent. Sei σ eine Beweisfolge, die zu einem Widerspruch führt. Da σ endlich ist, werden eben auch nur endlich viele Aussagen aus T verwendet. Also existiert ein endliches $T_0 \subset T$, sodass σ einen Widerspruch erzeugt. Also existiert eine endliche, nichterfüllbare Teilmenge von T $\square$

2.1 Kompaktheits Satz

Satz 2.1.4 (Kompaktheitssatz): T ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.

Beweis.
" $\Rightarrow$ " Ist ja wieder offensichtlich, da wenn T widerspruchsfrei ist, so ist auch jede Teilmenge widerspruchsfrei. Also nur noch Gegenrichtung zu zeigen.
Angenommen T ist nicht erfüllbar. Dann ist T auch inkonsistent. Sei σ eine Beweisfolge, die zu einem Widerspruch führt. Da σ endlich ist, werden eben auch nur endlich viele Aussagen aus T verwendet. Also existiert ein endliches $T_0 \subset T$, sodass σ einen Widerspruch erzeugt. Also existiert eine endliche, nichterfüllbare Teilmenge von T □

Der Kompaktheitssatz bildet ein Fundament für die Modelltheorie. Wir beweisen nicht Gödel's Satz, sondern geben einen weiteren Beweis für den Kompaktheitssatz, der nicht aus Gödel entspringt.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir sagen, dass eine Theorie T endlich erfüllbar ist, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir sagen, dass eine Theorie T endlich erfüllbar ist, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.
Wir werden zeigen, dass jede endlich erfüllbare Theorie T erfüllbar ist. Dazu konstruieren wir ein Modell von T.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir sagen, dass eine Theorie T endlich erfüllbar ist, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.
Wir werden zeigen, dass jede endlich erfüllbare Theorie T erfüllbar ist. Dazu konstruieren wir ein Modell von T. Die Hauptidee der Konstruktion besteht darin, genügend Konstanten zur Sprache hinzuzufügen, sodass jedes Element unseres Modells durch ein Konstantensymbol benannt wird.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir sagen, dass eine Theorie T endlich erfüllbar ist, wenn jede endliche Teilmenge von T erfüllbar ist.
Wir werden zeigen, dass jede endlich erfüllbare Theorie T erfüllbar ist. Dazu konstruieren wir ein Modell von T. Die Hauptidee der Konstruktion besteht darin, genügend Konstanten zur Sprache hinzuzufügen, sodass jedes Element unseres Modells durch ein Konstantensymbol benannt wird.Die folgende Definition wird uns hinreichende Bedingungen geben, um ein Modell aus den Konstanten zu konstruieren.

Definition 2.1.5: Wir sagen eine $\mathcal{L}$-Theorie T die *Zeugeneigenschaft* (*witness property*) hat, wenn gilt: Ist $\phi(v)$ eine $\mathcal{L}$-Formel mit genau einer freien Variable v, dann existiert ein Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}$, sodass $T \models (\exists v \phi(v)) \rightarrow \phi(c)$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Definition 2.1.5: Wir sagen eine $\mathcal{L}$-Theorie T die *Zeugeneigenschaft* (*witness property*) hat, wenn gilt: Ist $\phi(v)$ eine $\mathcal{L}$-Formel mit genau einer freien Variable v, dann existiert ein Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}$, sodass $T \models (\exists v \phi(v)) \to \phi(c)$
T heißt *maximal*, wenn für jede Formel entweder $\phi \in T$ oder $\neg\phi \in T$ gilt.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.6: Sei T eine maximale und endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie. Wenn $\Delta \subset T$ endlich ist und $\Delta \models \psi$, dann gilt $\psi \in T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.6: Sei T eine maximale und endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie. Wenn $\Delta \subset T$ endlich ist und $\Delta \models \psi$, dann gilt $\psi \in T$.

Beweis.
Angenommen $\psi \notin T$.
Da T maximal ist, gilt also $\neg\psi \in T$.
Aber dann ist eine $\Delta \cup \{\neg\psi\}$ eine endliche, nicht erfüllbare Teilmenge von T.
Also ist die Behauptung bewiesen. □

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.7: Angenommen T ist maximal, endlich erfüllbar und hat die Zeugeneigenschaft. Dann besitzt T ein Modell.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.7: Angenommen T ist maximal, endlich erfüllbar und hat die Zeugeneigenschaft. Dann besitzt T ein Modell. Genauer: Wenn κ eine Kardinalzahl ist und $\mathcal{L}$ höchstens κ Konstantensymbile hat, dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models T$ mit $|\mathcal{M}| \leq \kappa$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.7: Angenommen T ist maximal, endlich erfüllbar und hat die Zeugeneigenschaft. Dann besitzt T ein Modell. Genauer: Wenn κ eine Kardinalzahl ist und $\mathcal{L}$ höchstens κ Konstantensymbile hat, dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models T$ mit $|\mathcal{M}| \leq \kappa$.

Beweis Sei $\mathcal{C}$ die Menge aler Konstanten aus $\mathcal{L}$. Für $c, d \in \mathcal{C}$ sagen wir $c \sim d$, wenn $T \models c = d$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.7: Angenommen T ist maximal, endlich erfüllbar und hat die Zeugeneigenschaft. Dann besitzt T ein Modell. Genauer: Wenn κ eine Kardinalzahl ist und $\mathcal{L}$ höchstens κ Konstantensymbile hat, dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models T$ mit $|\mathcal{M}| \leq \kappa$.

Beweis Sei $\mathcal{C}$ die Menge aler Konstanten aus $\mathcal{L}$. Für $c, d \in \mathcal{C}$ sagen wir $c \sim d$, wenn $T \models c = d$

Behauptung 1 $\sim$ is eine Äquivalenzrelation.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.7: Angenommen T ist maximal, endlich erfüllbar und hat die Zeugeneigenschaft. Dann besitzt T ein Modell. Genauer: Wenn κ eine Kardinalzahl ist und $\mathcal{L}$ höchstens κ Konstantensymbile hat, dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models T$ mit $|\mathcal{M}| \leq \kappa$.

Beweis Sei $\mathcal{C}$ die Menge aler Konstanten aus $\mathcal{L}$. Für $c, d \in \mathcal{C}$ sagen wir $c \sim d$, wenn $T \models c = d$

Behauptung 1 $\sim$ is eine Äquivalenzrelation.

Offensichtlich ist $c = c$ in T. Angenommen $c = d$ und $d = e$ sind in T. Nach Lemma 2.1.6 sind also auch $d = c$ und $c = e$ in T enthalten. $\square$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.7: Angenommen T ist maximal, endlich erfüllbar und hat die Zeugeneigenschaft. Dann besitzt T ein Modell. Genauer: Wenn κ eine Kardinalzahl ist und $\mathcal{L}$ höchstens κ Konstantensymbile hat, dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models T$ mit $|\mathcal{M}| \leq \kappa$.

Beweis Sei $\mathcal{C}$ die Menge aler Konstanten aus $\mathcal{L}$. Für $c, d \in \mathcal{C}$ sagen wir $c \sim d$, wenn $T \models c = d$

Behauptung 1 $\sim$ is eine Äquivalenzrelation.

Offensichtlich ist $c = c$ in T. Angenommen $c = d$ und $d = e$ sind in T. Nach Lemma 2.1.6 sind also auch $d = c$ und $c = e$ in T enthalten. $\square$

Sei $M = \mathcal{C}/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathcal{C}$ bezüglich $\sim$ das Universum unseres Modells.

Wir interpretieren c als seine eigene Äquivalenzklasse c^* und $c^{\mathcal{M}} = c^*$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.7: Angenommen T ist maximal, endlich erfüllbar und hat die Zeugeneigenschaft. Dann besitzt T ein Modell. Genauer: Wenn κ eine Kardinalzahl ist und $\mathcal{L}$ höchstens κ Konstantensymbile hat, dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models T$ mit $|\mathcal{M}| \leq \kappa$.

Beweis Sei $\mathcal{C}$ die Menge aler Konstanten aus $\mathcal{L}$. Für $c, d \in \mathcal{C}$ sagen wir $c \sim d$, wenn $T \models c = d$

Behauptung 1 $\sim$ is eine Äquivalenzrelation.

Offensichtlich ist $c = c$ in T. Angenommen $c = d$ und $d = e$ sind in T. Nach Lemma 2.1.6 sind also auch $d = c$ und $c = e$ in T enthalten. □

Sei $M = \mathcal{C}/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathcal{C}$ bezüglich $\sim$ das Universum unseres Modells.

Wir interpretieren c als seine eigene Äquivalenzklasse c^* und $c^{\mathcal{M}} = c^*$.

Also nächstes schauen wir uns die Interpretation der Relation und von Funktionssymbolen an.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Angenommen R ist eine n-stellige Relation aus $\mathcal{L}$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Angenommen R ist eine n-stellige Relation aus $\mathcal{L}$.
Behauptung 2 Angenommen $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in C$ und $c_i \sim d_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt: $R(c) \in T \iff R(d) \in T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Angenommen R ist eine n-stellige Relation aus $\mathcal{L}$.
Behauptung 2 Angenommen $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in C$ und $c_i \sim d_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt: $R(c) \in T \iff R(d) \in T$.

Da $c_i = d_i \in T$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, folgt nach Lemma 2.1.6: Wenn eine der Formeln $R(c)$ oder $R(d)$ in T ist, dann sind beide in T. $\square$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Angenommen R ist eine n-stellige Relation aus $\mathcal{L}$.
Behauptung 2 Angenommen $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in C$ und $c_i \sim d_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt: $R(c) \in T \iff R(d) \in T$.

Da $c_i = d_i \in T$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, folgt nach Lemma 2.1.6: Wenn eine der Formeln $R(c)$ oder $R(d)$ in T ist, dann sind beide in T. $\square$

Wir interpretieren R als

$$R^{\mathcal{M}} = \{(c_1^* \ldots, c_n^*) : R(c_1, \ldots, c_n) \in T)\} \tag{1}$$

Nach Behauptung 2 ist $R^{\mathcal{M}}$ wohldefiniert.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Angenommen f ist ein n-stelliges Funktionssymbol aus $\mathcal{L}$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$. Da $\emptyset \models \exists v f(c_1, \ldots, c_n) = v$, also die Aussage gilt immer, und T die Zeugeneigenschaft hat, existiert nach Lemma 2.1.6 ein $c_{n+1} \in C$, sodass $f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1} \in T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Angenommen f ist ein n-stelliges Funktionssymbol aus $\mathcal{L}$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$. Da $\emptyset \models \exists v f(c_1, \ldots, c_n) = v$, also die Aussage gilt immer, und T die Zeugeneigenschaft hat, existiert nach Lemma 2.1.6 ein $c_{n+1} \in C$, sodass $f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1} \in T$. Ähnlich wie oben gilt $d_i \sim c_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$ impliziert $f(d_1, \ldots, d_n) = d_{n+1} \in T$. Und weiter gilt, wenn $e_i \sim c_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $f(e_1, \ldots, e_n) = e_{n+1} \in T$, so gilt $e_{n+1} \sim c_{n+1}$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Angenommen f ist ein n-stelliges Funktionssymbol aus $\mathcal{L}$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$. Da $\emptyset \models \exists v f(c_1, \ldots, c_n) = v$, also die Aussage gilt immer, und T die Zeugeneigenschaft hat, existiert nach Lemma 2.1.6 ein $c_{n+1} \in C$, sodass $f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1} \in T$. Ähnlich wie oben gilt $d_i \sim c_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$ impliziert $f(d_1, \ldots, d_n) = d_{n+1} \in T$. Und weiter gilt, wenn $e_i \sim c_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $f(e_1, \ldots, e_n) = e_{n+1} \in T$, so gilt $e_{n+1} \sim c_{n+1}$. Also ist $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$ wohldefiniert, da

$$f^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c^* n) = d^* \iff f(c_1, \ldots, c_n) = d \in T \qquad (2)$$

. Die interpretation der Symbole ist also fertig. Aber bevor wir unsere Hauptbehauptung zeigen, müssen wir noch zeigen, dass Terme sich korrekt verhalten.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 3: Angenommen t ist ein Term mit freien Variablen aus $v_1, \dots, v_n$. Sind $c_1, \dots, c_n, d \in C$, so gilt
$t(c_1, \dots, c_n) = d \in T \iff t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d^*$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 3: Angenommen t ist ein Term mit freien Variablen aus $v_1, \ldots, v_n$. Sind $c_1, \ldots, c_n, d \in C$, so gilt
$t(c_1, \ldots, c_n) = d \in T \iff t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

($\Rightarrow$) Wir zeigen per Induktion über Terme: Wenn $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in T$, dann gilt $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 3: Angenommen t ist ein Term mit freien Variablen aus $v_1, \ldots, v_n$. Sind $c_1, \ldots, c_n, d \in C$, so gilt
$t(c_1, \ldots, c_n) = d \in T \iff t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

($\Rightarrow$) Wir zeigen per Induktion über Terme: Wenn $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in T$, dann gilt $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

- Falls t ein Konstantensymbol c ist, dann gilt $c = d \in T$ und $c^{\mathcal{M}} = c^* = d^*$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 3: Angenommen t ist ein Term mit freien Variablen aus $v_1, \ldots, v_n$. Sind $c_1, \ldots, c_n, d \in C$, so gilt
$t(c_1, \ldots, c_n) = d \in T \iff t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

($\Rightarrow$) Wir zeigen per Induktion über Terme: Wenn $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in T$, dann gilt $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

- Falls t ein Konstantensymbol c ist, dann gilt $c = d \in T$ und $c^{\mathcal{M}} = c^* = d^*$.
- Falls t die Variable v_i ist, dann gilt $c_i = d \in T$ und $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = c_i^* = d^*$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 3: Angenommen t ist ein Term mit freien Variablen aus $v_1, \dots, v_n$. Sind $c_1, \dots, c_n, d \in C$, so gilt
$t(c_1, \dots, c_n) = d \in T \iff t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d^*$.

($\Rightarrow$) Wir zeigen per Induktion über Terme: Wenn $t(c_1, \dots, c_n) = d \in T$, dann gilt $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d^*$.

- Falls t ein Konstantensymbol c ist, dann gilt $c = d \in T$ und $c^{\mathcal{M}} = c^* = d^*$.
- Falls t die Variable v_i ist, dann gilt $c_i = d \in T$ und $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = c_i^* = d^*$.
- Angenommen, die Behauptung gilt für $t_1, \dots, t_m$ und $t = f(t_1, \dots, t_m)$. Mit der Zeugeneigenschaft und Lemma 2.1.6 können wir $d, d_1, \dots, d_n \in C$ finden, sodass $t_i(c_1, \dots, c_n) = d_i \in T$ für $i \leq m$ und $f(d_1, \dots, d_m) = d \in T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 3: Angenommen t ist ein Term mit freien Variablen aus $v_1, \ldots, v_n$. Sind $c_1, \ldots, c_n, d \in C$, so gilt
$t(c_1, \ldots, c_n) = d \in T \iff t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

($\Rightarrow$) Wir zeigen per Induktion über Terme: Wenn $t(c_1, \ldots, c_n) = d \in T$, dann gilt $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

- Falls t ein Konstantensymbol c ist, dann gilt $c = d \in T$ und $c^{\mathcal{M}} = c^* = d^*$.
- Falls t die Variable v_i ist, dann gilt $c_i = d \in T$ und $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = c_i^* = d^*$.
- Angenommen, die Behauptung gilt für $t_1, \ldots, t_m$ und $t = f(t_1, \ldots, t_m)$. Mit der Zeugeneigenschaft und Lemma 2.1.6 können wir $d, d_1, \ldots, d_n \in C$ finden, sodass $t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i \in T$ für $i \leq m$ und $f(d_1, \ldots, d_m) = d \in T$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $t_i^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d_i^*$ und $f^{\mathcal{M}}(d_1^*, \ldots, d_m^*) = d^*$. Also folgt $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

($\Leftarrow$) Angenommen, $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d^*$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

($\Leftarrow$) Angenommen, $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d^*$. Mit der Zeugeneigenschaft und Lemma 2.1.6 gibt es ein $e \in C$ mit $t(c_1, \dots, c_n) = e \in T$. Mit der ($\Rightarrow$)-Richtung folgt $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = e^*$. Also gilt $e^* = d^*$ und $e = d \in T$. Nach Lemma 2.1.6 folgt $t(c_1, \dots, c_n) = d \in T$. $\square$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 4 Für alle L-Formeln $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$ gilt

$$\mathcal{M} \models \varphi(c^*) \iff \varphi(c) \in T.$$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 4 Für alle L-Formeln $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$ gilt

$$\mathcal{M} \models \varphi(c^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(c) \in T.$$

Wir beweisen diese Behauptung per Induktion über den Aufbau von Formeln.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 4 Für alle L-Formeln $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$ gilt

$$\mathcal{M} \models \varphi(c^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(c) \in T.$$

Wir beweisen diese Behauptung per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Fall 1: φ ist $t_1 = t_2$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 4 Für alle L-Formeln $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$ gilt

$$\mathcal{M} \models \varphi(c^*) \iff \varphi(c) \in T.$$

Wir beweisen diese Behauptung per Induktion über den Aufbau von Formeln.
Fall 1: φ ist $t_1 = t_2$. Nach Lemma 2.1.6 und der Zeugeneigenschaft gibt es $d_1, d_2 \in \mathcal{C}$, sodass $t_1(c) = d_1$ und $t_2(c) = d_2$ in T sind. Nach Behauptung 3 gilt $t_i^{\mathcal{M}}(c^*) = d_i^*$ für $i = 1, 2$. Dann:

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung 4 Für alle L-Formeln $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$ gilt

$$\mathcal{M} \models \varphi(c^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(c) \in T.$$

Wir beweisen diese Behauptung per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Fall 1: φ ist $t_1 = t_2$. Nach Lemma 2.1.6 und der Zeugeneigenschaft gibt es $d_1, d_2 \in \mathcal{C}$, sodass $t_1(c) = d_1$ und $t_2(c) = d_2$ in T sind. Nach Behauptung 3 gilt $t_i^{\mathcal{M}}(c^*) = d_i^*$ für $i = 1, 2$. Dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models t_1(c^*) = t_2(c^*) &\Longleftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}(c^*) = t_2^{\mathcal{M}}(c^*) \Longleftrightarrow d_1^* = d_2^* \\ &\Longleftrightarrow d_1 = d_2 \in T \Longleftrightarrow \ t_1(c) = t_2(c) \in T. \end{aligned}$$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 2: φ ist $R(t_1, \ldots, t_m)$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 2: φ ist $R(t_1, \ldots, t_m)$. Da T die Zeugeneigenschaft hat, gibt es nach Lemma 2.1.6 $d_1, \ldots, d_m \in \mathcal{C}$ mit $t_i(c) = d_i \in T$ und nach Behauptung 3 $t_i^{\mathcal{M}}(c^*) = d_i^*$ für alle i.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 2: φ ist $R(t_1, \ldots, t_m)$. Da T die Zeugeneigenschaft hat, gibt es nach Lemma 2.1.6 $d_1, \ldots, d_m \in \mathcal{C}$ mit $t_i(c) = d_i \in T$ und nach Behauptung 3 $t_i^{\mathcal{M}}(c^*) = d_i^*$ für alle i. Dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \phi(c^*) &\iff \mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_m)(c^*) \\
&\iff (t_1^*(c^*), \ldots, t_m^*(c^*)) \in R^M \\
&\iff (d_1^*, \ldots, d_m^*) \in R^M \\
&\iff \ R(d_1, \ldots, d_m) \in T \\
&\iff R(t_1(c), \ldots, t_m(c)) \in T \iff \varphi(c) \in T.
\end{aligned}$$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 3: $\varphi = \neg\psi$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 3: $\varphi = \neg\psi$. Angenommen, $\mathcal{M} \models \neg\psi(c^*)$. Dann gilt $\mathcal{M} \not\models \psi(c^*)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\psi(c) \notin T$. Da T maximal ist, gilt dann $\neg\psi(c) \in T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 3: $\varphi = \neg\psi$. Angenommen, $\mathcal{M} \models \neg\psi(c^*)$. Dann gilt $\mathcal{M} \not\models \psi(c^*)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\psi(c) \notin T$. Da T maximal ist, gilt dann $\neg\psi(c) \in T$.
Umgekehrt, falls $\neg\psi(c) \in T$, dann ist $\psi(c) \notin T$ (weil T endlich erfüllbar ist). Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathcal{M} \not\models \psi(c^*)$ und somit $\mathcal{M} \models \neg\psi(c^*)$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 4: $\varphi = \psi \wedge \theta$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 4: $\varphi = \psi \wedge \theta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models (\psi \wedge \theta)(c^*) &\iff \mathcal{M} \models \psi(c^*) \text{ und } \mathcal{M} \models \theta(c^*) \\ &\iff \psi(c) \in T \text{ und } \theta(c) \in T \iff (\psi \wedge \theta)(c) \in T.\end{aligned}$$

Fall 5: $\varphi = \exists v\, \psi(v)$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 4: $\varphi = \psi \wedge \theta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models (\psi \wedge \theta)(c^*) &\iff \mathcal{M} \models \psi(c^*) \text{ und } \mathcal{M} \models \theta(c^*) \\ &\iff \psi(c) \in T \text{ und } \theta(c) \in T \iff (\psi \wedge \theta)(c) \in T. \end{aligned}$$

Fall 5: $\varphi = \exists v\, \psi(v)$. Angenommen $\mathcal{M} \models \psi(d^*, c^*)$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\psi(d, c) \in T$, also auch $\exists v\, \psi(v, c) \in T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 4: $\varphi = \psi \wedge \theta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models (\psi \wedge \theta)(c^*) &\iff \mathcal{M} \models \psi(c^*) \text{ und } \mathcal{M} \models \theta(c^*)\\ &\iff \psi(c) \in T \text{ und } \theta(c) \in T \iff (\psi \wedge \theta)(c) \in T.\end{aligned}$$

Fall 5: $\varphi = \exists v\, \psi(v)$. Angenommen $\mathcal{M} \models \psi(d^*, c^*)$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\psi(d, c) \in T$, also auch $\exists v\, \psi(v, c) \in T$. Umgekehrt, wenn $\exists v\, \psi(v, c) \in T$ gilt, dann liefert die Zeugeneigenschaft ein d, sodass $\psi(d, c) \in T$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathcal{M} \models \psi(d^*, c^*)$ und somit $\mathcal{M} \models \exists v\, \psi(v, c^*)$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Fall 4: $\varphi = \psi \wedge \theta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash (\psi \wedge \theta)(c^*) &\iff \mathcal{M} \vDash \psi(c^*) \text{ und } \mathcal{M} \vDash \theta(c^*) \\ &\iff \psi(c) \in T \text{ und } \theta(c) \in T \iff (\psi \wedge \theta)(c) \in T. \end{aligned}$$

Fall 5: $\varphi = \exists v\, \psi(v)$. Angenommen $\mathcal{M} \vDash \psi(d^*, c^*)$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $\psi(d, c) \in T$, also auch $\exists v\, \psi(v, c) \in T$. Umgekehrt, wenn $\exists v\, \psi(v, c) \in T$ gilt, dann liefert die Zeugeneigenschaft ein d, sodass $\psi(d, c) \in T$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathcal{M} \vDash \psi(d^*, c^*)$ und somit $\mathcal{M} \vDash \exists v\, \psi(v, c^*)$.
Damit ist die Induktion abgeschlossen. Insbesondere gilt $\mathcal{M} \vDash T$, wie gewünscht. $\blacksquare$

Lemma 2.1.8 Sei T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie. Dann gibt es eine Sprache $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ und eine $\mathcal{L}^*$-Theorie $T^* \supseteq T$, die endlich erfüllbar ist, sodass jede $\mathcal{L}^*$-Theorie, die T^* erweitert, die Zeugeneigenschaft besitzt.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung: T_1 ist endlich erfüllbar.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung: T_1 ist endlich erfüllbar.
Angenommen, Δ ist eine endliche Teilmenge von T_1. Dann gilt $\Delta = \Delta_0 \cup \{\Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_n}\}$, wobei Δ_0 eine endliche Teilmenge von T ist. Da T endlich erfüllbar ist, gibt es eine Struktur $\mathcal{M} \vDash \Delta_0$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung: T_1 ist endlich erfüllbar.
Angenommen, Δ ist eine endliche Teilmenge von T_1. Dann gilt $\Delta = \Delta_0 \cup \{\Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_n}\}$, wobei Δ_0 eine endliche Teilmenge von T ist. Da T endlich erfüllbar ist, gibt es eine Struktur $\mathcal{M} \models \Delta_0$. Wir erweitern $\mathcal{M}$ zu einer $\mathcal{L} \cup \{c_{\varphi_1}, \ldots, c_{\varphi_n}\}$-Struktur $\mathcal{M}'$. Da wir die Interpretation der Symbole aus $\mathcal{L}$ nicht ändern, gilt weiterhin $\mathcal{M}' \models \Delta_0$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung: T_1 ist endlich erfüllbar.
Angenommen, Δ ist eine endliche Teilmenge von T_1. Dann gilt $\Delta = \Delta_0 \cup \{\Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_n}\}$, wobei Δ_0 eine endliche Teilmenge von T ist. Da T endlich erfüllbar ist, gibt es eine Struktur $\mathcal{M} \models \Delta_0$.
Wir erweitern $\mathcal{M}$ zu einer $\mathcal{L} \cup \{c_{\varphi_1}, \ldots, c_{\varphi_n}\}$-Struktur $\mathcal{M}'$. Da wir die Interpretation der Symbole aus $\mathcal{L}$ nicht ändern, gilt weiterhin $\mathcal{M}' \models \Delta_0$.
Wir müssen nun nur noch die Symbole c_{φ_i} in $\mathcal{M}'$ interpretieren:

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung: T_1 ist endlich erfüllbar.
Angenommen, Δ ist eine endliche Teilmenge von T_1. Dann gilt $\Delta = \Delta_0 \cup \{\Theta_{\varphi_1}, \dots, \Theta_{\varphi_n}\}$, wobei Δ_0 eine endliche Teilmenge von T ist. Da T endlich erfüllbar ist, gibt es eine Struktur $\mathcal{M} \models \Delta_0$.
Wir erweitern $\mathcal{M}$ zu einer $\mathcal{L} \cup \{c_{\varphi_1}, \dots, c_{\varphi_n}\}$-Struktur $\mathcal{M}'$. Da wir die Interpretation der Symbole aus $\mathcal{L}$ nicht ändern, gilt weiterhin $\mathcal{M}' \models \Delta_0$.
Wir müssen nun nur noch die Symbole c_{φ_i} in $\mathcal{M}'$ interpretieren: Falls $\mathcal{M} \models \exists v\, \varphi_i(v)$, wählen wir ein $a_i \in M$, sodass $\mathcal{M} \models \varphi_i(a_i)$, und setzen $c_{\varphi_i}^{\mathcal{M}'} = a_i$. Andernfalls sei $c_{\varphi_i}^{\mathcal{M}'}$ ein beliebiges Element von M. Offensichtlich gilt dann $\mathcal{M}' \models \Theta_{\varphi_i}$ für alle $i \leq n$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Behauptung: T_1 ist endlich erfüllbar.
Angenommen, Δ ist eine endliche Teilmenge von T_1. Dann gilt $\Delta = \Delta_0 \cup \{\Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_n}\}$, wobei Δ_0 eine endliche Teilmenge von T ist. Da T endlich erfüllbar ist, gibt es eine Struktur $\mathcal{M} \models \Delta_0$.
Wir erweitern $\mathcal{M}$ zu einer $\mathcal{L} \cup \{c_{\varphi_1}, \ldots, c_{\varphi_n}\}$-Struktur $\mathcal{M}'$. Da wir die Interpretation der Symbole aus $\mathcal{L}$ nicht ändern, gilt weiterhin $\mathcal{M}' \models \Delta_0$.
Wir müssen nun nur noch die Symbole c_{φ_i} in $\mathcal{M}'$ interpretieren:
Falls $\mathcal{M} \models \exists v\, \varphi_i(v)$, wählen wir ein $a_i \in M$, sodass $\mathcal{M} \models \varphi_i(a_i)$, und setzen $c_{\varphi_i}^{\mathcal{M}'} = a_i$. Andernfalls sei $c_{\varphi_i}^{\mathcal{M}'}$ ein beliebiges Element von M. Offensichtlich gilt dann $\mathcal{M}' \models \Theta_{\varphi_i}$ für alle $i \leq n$.
Damit ist T_1 endlich erfüllbar.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir iterieren nun diese Konstruktion und erhalten eine Folge von Sprachen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \ldots$ und eine Folge von endlich erfüllbaren Theorien $T \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$ sodass für jede $\mathcal{L}_i$-Formel $\varphi(v)$ ein Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}_{i+1}$ existiert mit $T_{i+1} \models (\exists v\, \varphi(v)) \to \varphi(c)$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir iterieren nun diese Konstruktion und erhalten eine Folge von Sprachen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \ldots$ und eine Folge von endlich erfüllbaren Theorien $T \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$ sodass für jede $\mathcal{L}_i$-Formel $\varphi(v)$ ein Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}_{i+1}$ existiert mit $T_{i+1} \models (\exists v\, \varphi(v)) \to \varphi(c)$.Sei schließlich $\mathcal{L}^* = \bigcup_i \mathcal{L}_i \quad \text{und} \quad T^* = \bigcup_i T_i$. Nach Konstruktion besitzt T^* die Zeugeneigenschaft. Ist Δ eine endliche Teilmenge von T^*, so gilt $\Delta \subseteq T_i$ für ein i und somit ist Δ erfüllbar. Also ist T^* endlich erfüllbar.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir iterieren nun diese Konstruktion und erhalten eine Folge von Sprachen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \ldots$ und eine Folge von endlich erfüllbaren Theorien $T \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$ sodass für jede $\mathcal{L}_i$-Formel $\varphi(v)$ ein Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}_{i+1}$ existiert mit $T_{i+1} \models (\exists v\, \varphi(v)) \rightarrow \varphi(c)$.Sei schließlich $\mathcal{L}^* = \bigcup_i \mathcal{L}_i$ und $T^* = \bigcup_i T_i$. Nach Konstruktion besitzt T^* die Zeugeneigenschaft. Ist Δ eine endliche Teilmenge von T^*, so gilt $\Delta \subseteq T_i$ für ein i und somit ist Δ erfüllbar. Also ist T^* endlich erfüllbar.

Falls $|\mathcal{L}_i|$ die Anzahl der Relations-, Funktions- und Konstantensymbole in $\mathcal{L}_i$ ist, dann gibt es höchstens $|\mathcal{L}_i| + \aleph_0$ viele Formeln in $\mathcal{L}_i$. Somit gilt induktiv $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.9 Angenommen, T ist eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ ist eine $\mathcal{L}$-Aussage. Dann ist entweder $T \cup \{\phi\}$ oder $T \cup \{\neg\phi\}$ endlich erfüllbar.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.9 Angenommen, T ist eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ ist eine $\mathcal{L}$-Aussage. Dann ist entweder $T \cup \{\phi\}$ oder $T \cup \{\neg\phi\}$ endlich erfüllbar.

Beweis.

Angenommen, $T \cup \{\phi\}$ ist nicht endlich erfüllbar. Dann gibt es eine endliche Menge $\Delta \subseteq T$ mit $\Delta \models \neg\phi$. Wir behaupten, dass $T \cup \{\neg\phi\}$ endlich erfüllbar ist.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.9 Angenommen, T ist eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie und ϕ ist eine $\mathcal{L}$-Aussage. Dann ist entweder $T \cup \{\phi\}$ oder $T \cup \{\neg\phi\}$ endlich erfüllbar.

Beweis.

Angenommen, $T \cup \{\phi\}$ ist nicht endlich erfüllbar. Dann gibt es eine endliche Menge $\Delta \subseteq T$ mit $\Delta \models \neg\phi$. Wir behaupten, dass $T \cup \{\neg\phi\}$ endlich erfüllbar ist.
Sei Σ eine endliche Teilmenge von T. Da $\Delta \cup \Sigma$ erfüllbar ist und $\Delta \cup \Sigma \models \neg\phi$, ist auch $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ erfüllbar. Also ist $T \cup \{\neg\phi\}$ endlich erfüllbar. $\square$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Korollar 2.1.10 Wenn T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie ist, dann gibt es eine maximale endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie $T' \supseteq T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Korollar 2.1.10 Wenn T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie ist, dann gibt es eine maximale endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie $T' \supseteq T$.

Beweis.
Sei I die Menge aller endlich erfüllbaren $\mathcal{L}$-Theorien, die T enthalten. Wir versehen I mit einer Halbordnung durch Inklusion.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Korollar 2.1.10 Wenn T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie ist, dann gibt es eine maximale endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie $T' \supseteq T$.

Beweis.

Sei I die Menge aller endlich erfüllbaren $\mathcal{L}$-Theorien, die T enthalten. Wir versehen I mit einer Halbordnung durch Inklusion. Falls $C \subseteq I$ eine Kette ist, sei $T_C = \bigcup\{\Sigma : \Sigma \in C\}$. Falls Δ eine endliche Teilmenge von T_C ist, dann gibt es ein $\Sigma \in C$ mit $\Delta \subseteq \Sigma$, also ist T_C endlich erfüllbar und $T_C \supseteq \Sigma$ für alle $\Sigma \in C$.

Korollar 2.1.10 Wenn T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie ist, dann gibt es eine maximale endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie $T' \supseteq T$.

Beweis.

Sei I die Menge aller endlich erfüllbaren $\mathcal{L}$-Theorien, die T enthalten. Wir versehen I mit einer Halbordnung durch Inklusion. Falls $C \subseteq I$ eine Kette ist, sei $T_C = \bigcup\{\Sigma : \Sigma \in C\}$. Falls Δ eine endliche Teilmenge von T_C ist, dann gibt es ein $\Sigma \in C$ mit $\Delta \subseteq \Sigma$, also ist T_C endlich erfüllbar und $T_C \supseteq \Sigma$ für alle $\Sigma \in C$. Also besitzt jede Kette in I eine obere Schranke, und wir können das Lemma von Zorn anwenden, um ein $T' \in I$ zu finden, das bezüglich der partiellen Ordnung maximal ist.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Korollar 2.1.10 Wenn T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie ist, dann gibt es eine maximale endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie $T' \supseteq T$.

Beweis.
Sei I die Menge aller endlich erfüllbaren $\mathcal{L}$-Theorien, die T enthalten. Wir versehen I mit einer Halbordnung durch Inklusion. Falls $C \subseteq I$ eine Kette ist, sei $T_C = \bigcup\{\Sigma : \Sigma \in C\}$. Falls Δ eine endliche Teilmenge von T_C ist, dann gibt es ein $\Sigma \in C$ mit $\Delta \subseteq \Sigma$, also ist T_C endlich erfüllbar und $T_C \supseteq \Sigma$ für alle $\Sigma \in C$. Also besitzt jede Kette in I eine obere Schranke, und wir können das Lemma von Zorn anwenden, um ein $T' \in I$ zu finden, das bezüglich der partiellen Ordnung maximal ist.
Nach Lemma 2.1.9 ist entweder $T' \cup \{\phi\}$ oder $T' \cup \{\neg\phi\}$ endlich erfüllbar. Da T' maximal in der partiellen Ordnung ist, liegt entweder ϕ oder $\neg\phi$ in T'. Also ist T' eine maximale Theorie. $\square$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir können nun eine stärkere Aussage als der Kompaktheitssatz beweisen.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir können nun eine stärkere Aussage als der Kompaktheitssatz beweisen.

Satz 2.1.11 Sei T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie und κ eine unendliche Kardinalzahl mit $\kappa \geq |\mathcal{L}|$. Dann gibt es ein Modell von T mit Kardinalität höchstens κ.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir können nun eine stärkere Aussage als der Kompaktheitssatz beweisen.

Satz 2.1.11 Sei T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie und κ eine unendliche Kardinalzahl mit $\kappa \geq |\mathcal{L}|$. Dann gibt es ein Modell von T mit Kardinalität höchstens κ.

Beweis.

Nach Lemma 2.1.8 können wir eine Sprache $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ und eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}^*$-Theorie $T^* \supseteq T$ finden, sodass jede $\mathcal{L}^*$-Theorie, die T^* erweitert, die Zeugeneigenschaft besitzt und $|\mathcal{L}^*| \leq \kappa$ gilt.

Wir können nun eine stärkere Aussage als der Kompaktheitssatz beweisen.

Satz 2.1.11 Sei T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie und κ eine unendliche Kardinalzahl mit $\kappa \geq |\mathcal{L}|$. Dann gibt es ein Modell von T mit Kardinalität höchstens κ.

Beweis.

Nach Lemma 2.1.8 können wir eine Sprache $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ und eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}^*$-Theorie $T^* \supseteq T$ finden, sodass jede $\mathcal{L}^*$-Theorie, die T^* erweitert, die Zeugeneigenschaft besitzt und $|\mathcal{L}^*| \leq \kappa$ gilt.
Nach Korollar 2.1.10 können wir eine maximale endlich erfüllbare $\mathcal{L}^*$-Theorie $T' \supseteq T^*$ finden.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Wir können nun eine stärkere Aussage als der Kompaktheitssatz beweisen.

Satz 2.1.11 Sei T eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie und κ eine unendliche Kardinalzahl mit $\kappa \geq |\mathcal{L}|$. Dann gibt es ein Modell von T mit Kardinalität höchstens κ.

Beweis.

Nach Lemma 2.1.8 können wir eine Sprache $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ und eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}^*$-Theorie $T^* \supseteq T$ finden, sodass jede $\mathcal{L}^*$-Theorie, die T^* erweitert, die Zeugeneigenschaft besitzt und $|\mathcal{L}^*| \leq \kappa$ gilt.

Nach Korollar 2.1.10 können wir eine maximale endlich erfüllbare $\mathcal{L}^*$-Theorie $T' \supseteq T^*$ finden. Da T' die Zeugeneigenschaft hat, liefert Lemma 2.1.7 ein Modell $\mathcal{M} \models T'$ mit $|\mathcal{M}| \leq \kappa$. $\square$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Dieser Beweis basiert auf Henkins Beweis des Vollständigkeitssatzes. Die Methode, ein Modell zu konstruieren, bei dem das Universum aus den Konstantensymbolen aufgebaut wird, wird als Henkin-Konstruktion‘ bezeichnet, und Theorien mit der Zeugniseigenschaft werden manchmal als henkinisiert‘ bezeichnet.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Dieser Beweis basiert auf Henkins Beweis des Vollständigkeitssatzes. Die Methode, ein Modell zu konstruieren, bei dem das Universum aus den Konstantensymbolen aufgebaut wird, wird als Henkin-Konstruktion' bezeichnet, und Theorien mit der Zeugniseigenschaft werden manchmal als henkinisiert' bezeichnet.
Nun kommen noch einpaar Anwendungen des Satzes.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Proposition 2.1.13 Sei $\mathcal{L} = \{\cdot, +, <, 0, 1\}$ und sei $Th(\mathbb{N})$ die vollständige $\mathcal{L}$-Theorie der natürlichen Zahlen. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models Th(\mathbb{N})$ und ein $a \in M$, sodass a größer ist als jede natürliche Zahl.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Proposition 2.1.13 Sei $\mathcal{L} = \{\cdot, +, <, 0, 1\}$ und sei $Th(\mathbb{N})$ die vollständige $\mathcal{L}$-Theorie der natürlichen Zahlen. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models Th(\mathbb{N})$ und ein $a \in M$, sodass a größer ist als jede natürliche Zahl.

Beweis.

Sei $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c\}$, wobei c ein neues Konstantensymbol ist, und sei

$$T = Th(\mathbb{N}) \cup \{\, 1 + 1 + \cdots + 1 < c \;:\; n\text{-mal } 1, \text{ für } n = 1, 2, \ldots\}.$$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Proposition 2.1.13 Sei $\mathcal{L} = \{\cdot, +, <, 0, 1\}$ und sei $Th(\mathbb{N})$ die vollständige $\mathcal{L}$-Theorie der natürlichen Zahlen. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models Th(\mathbb{N})$ und ein $a \in M$, sodass a größer ist als jede natürliche Zahl.

Beweis.

Sei $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c\}$, wobei c ein neues Konstantensymbol ist, und sei

$$T = Th(\mathbb{N}) \cup \{ 1 + 1 + \cdots + 1 < c \ : \ n\text{-mal } 1, \text{ für } n = 1, 2, \ldots\}.$$

Ist Δ eine endliche Teilmenge von T, so können wir $\mathbb{N}$ zu einem Modell von Δ machen, indem wir c als hinreichend große natürliche Zahl interpretieren. Also ist T endlich erfüllbar und es gibt ein Modell $\mathcal{M} \models T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Proposition 2.1.13 Sei $\mathcal{L} = \{\cdot, +, <, 0, 1\}$ und sei $Th(\mathbb{N})$ die vollständige $\mathcal{L}$-Theorie der natürlichen Zahlen. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models Th(\mathbb{N})$ und ein $a \in M$, sodass a größer ist als jede natürliche Zahl.

Beweis.
Sei $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c\}$, wobei c ein neues Konstantensymbol ist, und sei

$$T = Th(\mathbb{N}) \cup \{1 + 1 + \cdots + 1 < c \ : \ n\text{-mal } 1, \text{ für } n = 1, 2, \ldots\}.$$

Ist Δ eine endliche Teilmenge von T, so können wir $\mathbb{N}$ zu einem Modell von Δ machen, indem wir c als hinreichend große natürliche Zahl interpretieren. Also ist T endlich erfüllbar und es gibt ein Modell $\mathcal{M} \models T$. Ist $a \in M$ die Interpretation von c, dann ist a größer als jede natürliche Zahl. $\square$

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.14 Falls $T \vDash \phi$, dann gilt $\Delta \vDash \phi$ für eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq T$.

2.1 Kompaktheits Satz (Henkin Konstruktion)

Lemma 2.1.14 Falls $T \models \phi$, dann gilt $\Delta \models \phi$ für eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq T$.

Beweis.

Angenommen es gilt nicht. Sei $\Delta \subseteq T$ endlich. Da $\Delta \not\models \phi$, ist $\Delta \cup \{\neg\phi\}$ erfüllbar. Also ist $T \cup \{\neg\phi\}$ endlich erfüllbar und nach dem Kompaktheitssatz gilt $T \not\models \phi$. $\square$