Back-and-Forth Argumente und Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Philipp Rabe

Back-And-Forth Argumente

Back-And-Forth Argumente

- Argumentationsstrategie in Beweisen
- Hin-und-her-springen zwischen verschiedenen Mengen bei Konstruktion z.B. von Isomorphismen zwischen unendlichen Strukturen

Back-And-Forth Argumente

- Argumentationsstrategie in Beweisen
- Hin-und-her-springen zwischen verschiedenen Mengen bei Konstruktion z.B. von Isomorphismen zwischen unendlichen Strukturen
- Bsp: Cantors Beweis für Isomorphie von abzählbaren dichten linearen Ordnungen

Bsp 1: Cantors Beweis

dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte (DLO):

Bsp 1: Cantors Beweis

dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte (DLO):

- $\forall x \neg(x < x)$
- $\forall x \forall y \forall z\, ((y < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$
- $\forall x \forall y\, (x < y \vee x = y \vee y < x)$
- $\forall x \forall y\, (x < y \rightarrow \exists\, x < z < y)$
- $\forall x \exists y \exists z\; y < x < z$

Bsp 1: Cantors Beweis

Beh: DLO ist $\aleph_0$-kategorisch und vollständig.

Bsp 1: Cantors Beweis

Beh: DLO ist $\aleph_0$-kategorisch und vollständig.

Beweisstrategie: Seien $(A, <)$ und $(B, <)$ abzählbare Modelle von DLO mit Nummerierung $a_0, a_1, ...$, bzw. $b_0, b_1, ...$

Konstruiere eine Folge partieller Bijektionen
$f_i : A_i \to B_i,\ A_i \subset A,\ B_i \subset B$ mit:

1. $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq ...$
2. $x, y \in A_i$ mit $x < y \to f_i(x) < f_i(y)$

Wenn $A = \bigcup A_i$ und $B = \bigcup B_i$, ist $f = \bigcup f_i$ der gesuchte Isomorphismus.

Dazu gehe A und B anhand ihrer Nummerierung durch und sorge dafür, dass jedes Element ein korrektes Bild bzw. Urbild hat.

Bsp 1: Cantors Beweis

Konstruktion: Bei ungeraden Konstruktionsschritten wird sichergestellt, dass $\bigcup A_i = A$, bei geraden, dass $\bigcup B_i = B$.

Bsp 1: Cantors Beweis

Konstruktion: Bei ungeraden Konstruktionsschritten wird sichergestellt, dass $\bigcup A_i = A$, bei geraden, dass $\bigcup B_i = B$.

$n = 0$: Setze $A_0 = B_0 = \emptyset = f_0$

Bsp 1: Cantors Beweis

Konstruktion: Bei ungeraden Konstruktionsschritten wird sichergestellt, dass $\bigcup A_i = A$, bei geraden, dass $\bigcup B_i = B$.

$n = 0 :$ Setze $A_0 = B_0 = \emptyset = f_0$
$n + 1 = 2m + 1 :$

- Fall $a_m \in A_n$: Setze $A_{n+1} = A_n$, $B_{n+1} = B_n$ und $f_{n+1} = f_n$
- Fall $a_m \notin A_n$:
  i) $\forall \alpha \in A_n \; \alpha < a_m$
  ii) $\forall \alpha \in A_n \; a_m < \alpha$
  iii) $\exists \alpha, \beta \in A_n \; \alpha < a_m < \beta$ und $\gamma \leq \beta$ oder $\alpha \leq \gamma$ für alle $\gamma \in A_n$

Bsp 1: Cantors Beweis

i) Da $B \models$DLO, existiert ein $b \in B \setminus B_n$, das größer ist als jedes Element von B_n.

ii) analog zu i) gibt es ein $b \in B$, das kleiner ist als jedes Element von B_n

iii) Es gilt $f_n(\alpha) < f_n(\beta)$ und es gibt ein $b \in B \setminus B_n$, sodass $f_n(\alpha) < b < f_n(\beta)$

Bsp 1: Cantors Beweis

i) Da $B \models$DLO, existiert ein $b \in B \setminus B_n$, das größer ist als jedes Element von B_n.

ii) analog zu i) gibt es ein $b \in B$, das kleiner ist als jedes Element von B_n

iii) Es gilt $f_n(\alpha) < f_n(\beta)$ und es gibt ein $b \in B \setminus B_n$, sodass $f_n(\alpha) < b < f_n(\beta)$

Setze $A_{n+1} = A_n \cup a_m$, $B_{n+1} = B_n \cup b$ und erweitere f_n zu $f_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ mit $f_{n+1}(a_m) = b$.

Für $n + 1 = 2m + 2$ kann auf die gleiche Weise sichergestellt werden, dass $b_m \in B_{n+1}$.

Bsp 1: Cantors Beweis

i) Da $B \models$DLO, existiert ein $b \in B \setminus B_n$, das größer ist als jedes Element von B_n.

ii) analog zu i) gibt es ein $b \in B$, das kleiner ist als jedes Element von B_n

iii) Es gilt $f_n(\alpha) < f_n(\beta)$ und es gibt ein $b \in B \setminus B_n$, sodass $f_n(\alpha) < b < f_n(\beta)$

Setze $A_{n+1} = A_n \cup a_m$, $B_{n+1} = B_n \cup b$ und erweitere f_n zu $f_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ mit $f_{n+1}(a_m) = b$.

Für $n + 1 = 2m + 2$ kann auf die gleiche Weise sichergestellt werden, dass $b_m \in B_{n+1}$.

Da es keine endlichen dichten linearen Ordnungen gibt, muss DLO nach Kriterium von Vaught vollständig sein.

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Axiomatisierung: Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ mit R zweistelligem Relationssymbol

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Axiomatisierung: Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ mit R zweistelligem Relationssymbol

Graphen-Axiome:

γ_1 $\forall x \, \neg R(x, x)$

γ_2 $\forall x, \forall y \, R(x, y) \to R(y, x)$

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Axiomatisierung: Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ mit R zweistelligem Relationssymbol

Graphen-Axiome:

γ_1 $\forall x \, \neg R(x,x)$

γ_2 $\forall x, \forall y \, R(x,y) \rightarrow R(y,x)$

Erweiterungs-Axiom ψ_n:

$$\forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1, ... \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \rightarrow \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z)) \right)$$

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Axiomatisierung: Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ mit R zweistelligem Relationssymbol

Graphen-Axiome:

γ_1 $\forall x \, \neg R(x,x)$

γ_2 $\forall x, \forall y \, R(x,y) \rightarrow R(y,x)$

Erweiterungs-Axiom ψ_n:

$$\forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1, ... \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \rightarrow \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z)) \right)$$

Sei $T = \{\gamma_1, \gamma_2\} \cup \{\exists x \exists y \, x \neq y\} \cup \{\psi_n : n = 1, 2, ...\}$

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Beh: T ist $\aleph_0$-kategorisch und erfüllbar.

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Beh: T ist $\aleph_0$-kategorisch und erfüllbar.

Beweisstrategie: Zeige, dass es ein abzählbares Modell von T gibt. Konstruiere dann analog Bsp. 1 einen Isomorphismus zwischen zwei beliebigen abzählbaren Modellen von T.

Sei G_0 ein abzählbarer Graph. Konstruiere $G_1 \supset G_0$ so, dass:
$G_1 = G_0 \cup \{z_X : X \subset G_0 \text{ endlich}\}$ und
$R_{G_1} = R_{G_0} \cup \{(z_X, x) : X \subset G_0 \text{ endlich und } x \in X\}$

Iteration dieser Konstruktion ergibt eine Folge $G_0 \subset G_1 \subset \ldots$, sodass $G = \bigcup G_n$ ein abzählbares Modell von T ist.

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Seien G_1 und G_2 abzählbare Modelle von T mit Auflistungen $a_0, a_1, ...$ bzw. $b_0, b_1, ...$ Konstruiere eine Folge $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq ...$, sodass für alle x, y im Definitionsbereich von f_s gilt, dass

$$G_1 \models R(x, y) \Leftrightarrow G_2 \models R(f_s(x), f_s(y))$$

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Seien G_1 und G_2 abzählbare Modelle von T mit Auflistungen $a_0, a_1, \dots$ bzw. $b_0, b_1, \dots$. Konstruiere eine Folge $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq$ ..., sodass für alle x, y im Definitionsbereich von f_s gilt, dass

$$G_1 \models R(x, y) \Leftrightarrow G_2 \models R(f_s(x), f_s(y))$$

Setze $f_0 = \emptyset$.

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Seien G_1 und G_2 abzählbare Modelle von T mit Auflistungen $a_0, a_1, ...$ bzw. $b_0, b_1, ...$. Konstruiere eine Folge $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq ...$, sodass für alle x, y im Definitionsbereich von f_s gilt, dass

$$G_1 \models R(x,y) \Leftrightarrow G_2 \models R(f_s(x), f_s(y))$$

Setze $f_0 = \emptyset$.

$\boldsymbol{s+1 = 2i+1:}$ Ziel a_i ist im Definiotionsbereich von f_{s+1}.

- Fall a_i ist im Definitionsbereich von f_s: Setze $f_{s+1} = f_s$
- Fall a_i ist nicht im Definitionsbereich von f_s: Konstruiere f_{s+1}, sodass obige Bedingung erfüllt ist.

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Sei $\alpha_1, ..., \alpha_m$ eine Auflistung des Definitionsbereichs von f_s und setzte $X = \{j \leq m : R(\alpha_j, a_i)\}$ und $Y = \{j \leq m : \neg R(\alpha_j, a_i)\}$

$G_2 \models$T
$\Rightarrow \exists b \in G_2$ mit $G_2 \models R(f_s(\alpha_j), b)$ für $j \in X$ und
$G_2 \models \neg R(f_s(\alpha_j), b)$ für $j \in Y$

Setze $f_{s+1} = f_s \cup \{(a_i, b)\}$

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Sei $\alpha_1, ..., \alpha_m$ eine Auflistung des Definitionsbereichs von f_s und setzte $X = \{j \leq m : R(\alpha_j, a_i)\}$ und $Y = \{j \leq m : \neg R(\alpha_j, a_i)\}$

$G_2 \models$T
$\Rightarrow \exists b \in G_2$ mit $G_2 \models R(f_s(\alpha_j), b)$ für $j \in X$ und
$G_2 \models \neg R(f_s(\alpha_j), b)$ für $j \in Y$

Setze $f_{s+1} = f_s \cup \{(a_i, b)\}$

Für $s + 1 = 2i + 2$ lässt sich f_{s+1} analog so konstruieren, dass b_i im Bild von f_{s+1} liegt.

$f = \bigcup f_s$ ist per Konstruktion Isomorphismus von G_1 zu G_2.
$\Rightarrow$ T ist $\aleph_0$-kategorisch.

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Sei $\alpha_1, ..., \alpha_m$ eine Auflistung des Definitionsbereichs von f_s und setzte $X = \{j \leq m : R(\alpha_j, a_i)\}$ und $Y = \{j \leq m : \neg R(\alpha_j, a_i)\}$

$G_2 \models$T
$\Rightarrow \exists b \in G_2$ mit $G_2 \models R(f_s(\alpha_j), b)$ für $j \in X$ und
$G_2 \models \neg R(f_s(\alpha_j), b)$ für $j \in Y$

Setze $f_{s+1} = f_s \cup \{(a_i, b)\}$

Für $s + 1 = 2i + 2$ lässt sich f_{s+1} analog so konstruieren, dass b_i im Bild von f_{s+1} liegt.

$f = \bigcup f_s$ ist per Konstruktion Isomorphismus von G_1 zu G_2.
$\Rightarrow$ T ist $\aleph_0$-kategorisch.

Da alle Modelle von T unendlich sind, ist T vollständig.

Bsp 2: Der Zufallsgraph

- T gibt informationen über endliche Zufallsgraphen
- Sei $\mathcal{G}_N$ die Menge aller Graphen mit Ecken $\{1, 2, ..., N\}$
- Betrachte ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das alle Graphen gleich wahrscheinlich macht (entspricht Kantenwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$)
- Für einen $\mathcal{L}$-Satz ϕ ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Element aus $\mathcal{G}_N$ ϕ erfüllt, aus

$$p_N(\phi) = \frac{|\{G \in \mathcal{G}_N : G \models \phi\}|}{|\mathcal{G}_N|}$$

- Ausreichend große Graphen erfüllen mit hoher Wahrscheinlichkeit das Erweiterungs-Axiom.

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Beh: $\lim_{N\to\infty} p_N(\psi_n) = 1$ für $n = 1, 2, ...$

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Beh: $\lim_{N \to \infty} p_N(\psi_n) = 1$ für $n = 1, 2, ...$

Bew:

- Für festes n sei $G \in \mathcal{G}_N, N > 2n$ beliebig. Seien $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z$ unterschiedliche Elemente von G.
- Die Wahrscheinlichkeit q, dass $\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z))\right)$ ist $1 - 2^{-2n} < 1$
- Da die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene z unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit dass $G \models \forall z \neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z))\right)$ gleich q^{N-2n} Sei M die Anzahl von Paaren disjunkter Teilmengen von G mit Größe n, dann ist

$$p_N(\neg\psi_n) \leq M q^{N-2n} \leq N^{2n} q^{N-2n} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Bsp 2: Der Zufallsgraph

Beh: $\lim_{N\to\infty} p_N(\psi_n) = 1$ für $n = 1, 2, \ldots$

Bew:

- Für festes n sei $G \in \mathcal{G}_N, N > 2n$ beliebig. Seien $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z$ unterschiedliche Elemente von G.
- Die Wahrscheinlichkeit q, dass $\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z))\right)$ ist $1 - 2^{-2n} < 1$
- Da die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene z unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit dass $G \models \forall z\, \neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n}(R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z))\right)$ gleich q^{N-2n}
- Sei M die Anzahl von Paaren disjunkter Teilmengen von G mit Größe n, dann ist

$$p_N(\neg\psi_n) \leq M q^{N-2n} \leq N^{2n} q^{N-2n} \underset{N\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Zero-One Law für Graphen

Beh: Für jedes $\mathcal{L}$-Wort ϕ gilt entweder $\lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 0$, oder $\lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 1$.

Zero-One Law für Graphen

Beh: Für jedes $\mathcal{L}$-Wort ϕ gilt entweder $\lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 0$, oder $\lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 1$.

Bew: T ist vollständig $\Rightarrow T \models \phi$ oder $T \models \neg\phi$

- Fall $T \models \phi$: Dann $\exists n$, sodass wenn G Graph ist und $G \models \psi_n$, dann $G \models \phi$.
  $\Rightarrow p_N(\phi) \geq p_N(\psi_n) \Rightarrow \lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 1$
- Fall $T \models \neg\phi$: Dann gilt analog
  $\lim_{N\to\infty} p_N(\neg\phi) = 1 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 0$

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

- **Idee:** Das gesehene Konstruktionsprinzip als Spiel
- Sei $\mathcal{L}$ Alphabet, $\mathcal{M} = \{M, ...\}$ und $\mathcal{N} = \{N, ...\}$ $\mathcal{L}$-Strukturen mit $M \cap N = \emptyset$.
- für $A \subset M$ und $B \subset N$ ist $f : A \to B$ eine partielle Einbettung, wenn $f \cup \{(c^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{N}}) : c \in \mathcal{L}$ ist Konstante$\}$ eine relations- und funktionserhaltene Bijektion ist.
- Zweispielerspiel $G_\omega(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ mit Spielern I und II, die in ω Zügen eine partielle Einbettung konstruieren.
- In Zug i gibt Spieler I entweder $m_i \in \mathcal{M}$ oder $n_i \in \mathcal{N}$ an. Spieler II muss das Gegenstück im Definitionsbereich, bzw. Bild von f angeben.
- Spieler II gewinnt, wenn f partielle Einbettung ist

Strategien

- Strategie für Spieler II ist Funktion τ, die die Züge von Spieler I auf die Züge von Spieler II abbildet.
- sind $c_1, ..., c_n$ erste n Züge von I, dann ist $\tau(c_1, ..., c_n)$ der n-te Zug von II.
- **Gewinnstrategie für II:** Strategie τ, sodass für jede Folge $c_1, ..., c_n$ II gewinnt, wenn er τ befolgt.

Strategien

- Strategie für Spieler II ist Funktion τ, die die Züge von Spieler I auf die Züge von Spieler II abbildet.
- sind $c_1, ..., c_n$ erste n Züge von I, dann ist $\tau(c_1, ..., c_n)$ der n-te Zug von II.
- **Gewinnstrategie für II:** Strategie τ, sodass für jede Folge $c_1, ..., c_n$ II gewinnt, wenn er τ befolgt.

Beh: sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abzählbar, dann hat II Gewinnstrategie gdw. $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$

Strategien

- Strategie für Spieler II ist Funktion τ, die die Züge von Spieler I auf die Züge von Spieler II abbildet.
- sind $c_1, ..., c_n$ erste n Züge von I, dann ist $\tau(c_1, ..., c_n)$ der n-te Zug von II.
- **Gewinnstrategie für II:** Strategie τ, sodass für jede Folge $c_1, ..., c_n$ II gewinnt, wenn er τ befolgt.

Beh: sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abzählbar, dann hat II Gewinnstrategie gdw. $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$

Bew:

$\Rightarrow$: Betrachte $m_1, m_2, ...$ und $n_1, n_2, ...$ Auflistungen von M und N. Spielt I die Folge $m_1, n_1, m_2, n_2, ...$ und II folgt der Gewinnstrategie, ist das Ergebnis f ein Isomorphismus.

$\Leftarrow$: Der Isomorphismus gibt II die Gewinnstrategie vor.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (EFS): Variante dieser Spiele mit endlichem $\mathcal{L}$ ohne Funktionssymbole und mit nur n Runden.

EFS geben Charakterisierung von elementarer Äquivalenz.
Es lässt sich zeigen, dass unter o.g Bedingungen $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ gdw. II für alle n eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ hat.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (EFS): Variante dieser Spiele mit endlichem $\mathcal{L}$ ohne Funktionssymbole und mit nur n Runden.

EFS geben Charakterisierung von elementarer Äquivalenz.
Es lässt sich zeigen, dass unter o.g Bedingungen $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ gdw. II für alle n eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ hat.

Erst einige Lemmas:

Lemma 1: Einer der Spieler hat eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Bew: Ang. II hat keine Gewinnstrategie. Dann kann I Gewinnen, indem er so spielt, dass II verliert („avoid losing positions"). Jede Runde gibt es einen Zug, sodass II keinen Gewinn forcieren kann.

Depth

Für eine $\mathcal{L}$-Formel ϕ sei die Tiefe $depth(\phi)$ induktiv definiert durch:

- $depth(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi$ enthät keinen Quantor
- $depth(\neg\phi) = depth(\phi)$
- $depth(\phi \wedge \psi) = depth(\phi \vee \psi) = max\{depth(\phi), depth(\psi)\}$
- $depth(\exists v\ \phi) = depth(\phi) + 1$

Depth

Für eine $\mathcal{L}$-Formel ϕ sei die Tiefe $depth(\phi)$ induktiv definiert durch:

- $depth(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi$ enthät keinen Quantor
- $depth(\neg\phi) = depth(\phi)$
- $depth(\phi \wedge \psi) = depth(\phi \vee \psi) = max\{depth(\phi), depth(\psi)\}$
- $depth(\exists v\ \phi) = depth(\phi) + 1$

Wir sagen $\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$, wenn $\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi$ für alle Formeln der Tiefe höchstens n.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Lemma 2: Für jedes n und l gibt es eine endliche Liste $\phi_1, ..., \phi_k$ mit Tiefe höchstens n und freien Variablen $x_1, ..., x_l$, sodass jede Formel der Teife höchstens n mit freien Variablen $x_1, ..., x_l$ zu einem ϕ_i äquivalent ist.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Lemma 2: Für jedes n und l gibt es eine endliche Liste $\phi_1, ..., \phi_k$ mit Tiefe höchstens n und freien Variablen $x_1, ..., x_l$, sodass jede Formel der Teife höchstens n mit freien Variablen $x_1, ..., x_l$ zu einem ϕ_i äquivalent ist.

Bew: $\mathcal{L}$ ist endlich und ohne Funktionssymbole
$\Rightarrow$ es gibt nur endlich viele atomare Formeln $\sigma_1, ..., \sigma_s$ in den freien Variablen $x_1, ..., x_l$. Jede Formel ϕ ist zu einer Formel in DNF äquivalent $\Rightarrow$ es gibt eine Menge S von Teilmengen von $\{1, ..., s\}$, sodass

$$\models \phi \leftrightarrow \bigvee_{X \in S} \left(\bigwedge_{i \in X} \sigma_i \wedge \bigwedge_{i \notin X} \neg \sigma_i \right)$$

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Lemma 2: Für jedes n und l gibt es eine endliche Liste $\phi_1, ..., \phi_k$ mit Tiefe höchstens n und freien Variablen $x_1, ..., x_l$, sodass jede Formel der Teife höchstens n mit freien Variablen $x_1, ..., x_l$ zu einem ϕ_i äquivalent ist.

Bew: $\mathcal{L}$ ist endlich und ohne Funktionssymbole
$\Rightarrow$ es gibt nur endlich viele atomare Formeln $\sigma_1, ..., \sigma_s$ in den freien Variablen $x_1, ..., x_l$. Jede Formel ϕ ist zu einer Formel in DNF äquivalent $\Rightarrow$ es gibt eine Menge S von Teilmengen von $\{1, ..., s\}$, sodass

$$\models \phi \leftrightarrow \bigvee_{X \in S} \left(\bigwedge_{i \in X} \sigma_i \wedge \bigwedge_{i \notin X} \neg\sigma_i \right)$$

$\Rightarrow$ Es gibt bis auf Äquivalenz nur endlich viele Formeln der Tiefe 0.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Lemma 2: Für jedes n und l gibt es eine endliche Liste $\phi_1, ..., \phi_k$ mit Tiefe höchstens n und freien Variablen $x_1, ..., x_l$, sodass jede Formel der Teife höchstens n mit freien Variablen $x_1, ..., x_l$ zu einem ϕ_i äquivalent ist.

Bew: $\mathcal{L}$ ist endlich und ohne Funktionssymbole
$\Rightarrow$ es gibt nur endlich viele atomare Formeln $\sigma_1, ..., \sigma_s$ in den freien Variablen $x_1, ..., x_l$. Jede Formel ϕ ist zu einer Formel in DNF äquivalent $\Rightarrow$ es gibt eine Menge S von Teilmengen von $\{1, ..., s\}$, sodass

$$\models \phi \leftrightarrow \bigvee_{X \in S} \left(\bigwedge_{i \in X} \sigma_i \wedge \bigwedge_{i \notin X} \neg \sigma_i \right)$$

$\Rightarrow$ Es gibt bis auf Äquivalenz nur endlich viele Formeln der Tiefe 0.

Per Induktion folgt die Behauptung für beliebige n.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Lemma 3: Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ gdw. $\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Lemma 3: Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ gdw. $\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$

Bew: per Induktion über n:
Angenommen $\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$ und I spielt $a \in M$. Sei $\phi_0(v), ..., \phi_m(v)$ eine Auflistung aller Formeln der Tiefe $< n$,
$X = \{i \leq m : \mathcal{M} \models \phi_i(a)\}$ und $\Phi(v) = \bigwedge_{i \in X} \phi_i(v) \wedge \bigwedge_{i \notin X} \neg\phi_i(v)$
$\Rightarrow depth(\exists v\, \Phi(v)) \leq n$ und $\mathcal{M} \models \Phi(a)$
$\Rightarrow \exists b \in \mathcal{N}$, sodass $\mathcal{N} \models \Phi(b)$
$\Rightarrow$ Gewinnstrategie für $n = 1$

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Lemma 3: Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ gdw. $\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$

Bew: per Induktion über n:
Angenommen $\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$ und I spielt $a \in M$. Sei $\phi_0(v), ..., \phi_m(v)$ eine Auflistung aller Formeln der Tiefe $< n$,
$X = \{i \leq m : \mathcal{M} \models \phi_i(a)\}$ und $\Phi(v) = \bigwedge_{i \in X} \phi_i(v) \wedge \bigwedge_{i \notin X} \neg\phi_i(v)$
$\Rightarrow depth(\exists v\, \Phi(v)) \leq n$ und $\mathcal{M} \models \Phi(a)$
$\Rightarrow \exists b \in \mathcal{N}$, sodass $\mathcal{N} \models \Phi(b)$
$\Rightarrow$ Gewinnstrategie für $n = 1$

Für $n > 1$ betrachte $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c\}$ und $\mathcal{L}^*$-Strukturen $(\mathcal{M}, a)$ und $(\mathcal{N}, b)$, wobei die neue Konstante c in $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ als a, bzw. b interpretiert wird.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Da $\mathcal{M} \models \phi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(b)$ für $\phi(v)$ mit $depth(\phi) < n$, gilt $(\mathcal{M}, a) \equiv_{n-1} (\mathcal{N}, b)$.
$\Rightarrow$ II hat Gewinnstrategie τ in $G_{n-1}((\mathcal{M}, a), (\mathcal{N}, b))$

Spielt I die Folge $a, d_1, ..., d_i$, betrachte $\tau(d_1, ..., d_i)$ und $f^* : X \to N$ die durch τ erzeugte partielle $\mathcal{L}^*$-Einbettung.
f^* erweitert zu $f : X \cup \{a\} \to N$ mit $f(a) = b$ ist eine partielle $\mathcal{L}$-Einbettung

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Da $\mathcal{M} \models \phi(a) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(b)$ für $\phi(v)$ mit $depth(\phi) < n$, gilt $(\mathcal{M}, a) \equiv_{n-1} (\mathcal{N}, b)$.
$\Rightarrow$ II hat Gewinnstrategie τ in $G_{n-1}((\mathcal{M}, a), (\mathcal{N}, b))$

Spielt I die Folge $a, d_1, ..., d_i$, betrachte $\tau(d_1, ..., d_i)$ und $f^* : X \to N$ die durch τ erzeugte partielle $\mathcal{L}^*$-Einbettung.
f^* erweitert zu $f : X \cup \{a\} \to N$ mit $f(a) = b$ ist eine partielle $\mathcal{L}$-Einbettung

$\Rightarrow$ Es existiert eine Gewinnstrategie für II

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Angenommen $\mathcal{M} \not\equiv_n \mathcal{N}$.

$\Rightarrow$ oBdA gilt dann für eine Formel ϕ mit $depth(\phi) < n$, sodass $\mathcal{M} \models \exists v\, \phi(v)$ und $\mathcal{N} \models \forall v\, \neg\phi(v)$

Angenommen I spielt $a \in M$, sodass $\mathcal{M} \models \phi(a)$ und II antwortet mit $b \in N$. Es gilt $(\mathcal{M}, a) \not\equiv_{n-1} (\mathcal{N}, b)$.
Nach Induktionsvorraussetzung hat I eine Gewinnstrategie in $G_{n-1}((\mathcal{M}, a), (\mathcal{N}, b))$
$\Rightarrow$ die resultierende Funktion f^* ist keine partielle $\mathcal{L}^*$-Einbettung.
$\Rightarrow$ die komplette Funktion f ist auch keine partielle Einbettung.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Angenommen $\mathcal{M} \not\equiv_n \mathcal{N}$.

$\Rightarrow$ oBdA gilt dann für eine Formel ϕ mit $depth(\phi) < n$, sodass $\mathcal{M} \models \exists v\, \phi(v)$ und $\mathcal{N} \models \forall v\, \neg\phi(v)$

Angenommen I spielt $a \in M$, sodass $\mathcal{M} \models \phi(a)$ und II antwortet mit $b \in N$. Es gilt $(\mathcal{M}, a) \not\equiv_{n-1} (\mathcal{N}, b)$.
Nach Induktionsvorraussetzung hat I eine Gewinnstrategie in $G_{n-1}((\mathcal{M}, a), (\mathcal{N}, b))$
$\Rightarrow$ die resultierende Funktion f^* ist keine partielle $\mathcal{L}^*$-Einbettung.
$\Rightarrow$ die komplette Funktion f ist auch keine partielle Einbettung.

$\Rightarrow$ II hat eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$
$\Rightarrow$ II hat eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ für alle $n \Leftrightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$

Anwendungsbeispiel

Betrachte $\mathcal{L} = \{<\}$ und T die $\mathcal{L}$-Theorie diskreter Ordnungen ohne Endpunkte.
Angenommen $\mathcal{N} \models T$. Für $a, b \in N$ ist aEb, wenn b der n-te Vorgänger oder Nachvolger von a ist für ein $n \in \mathbb{N}$.

E-Klassen sind linear geordnete lineare Ordnungen, die aussehen wie $(\mathbb{Z}, <)$
$\Rightarrow$ Modelle von T sind von der Form $(L \times \mathbb{Z}, <)$ mit linearer Ordnung L und $<$ der lexikographischen Ordnung auf $L \times \mathbb{Z}$.

Anwendungsbeispiel

Betrachte $\mathcal{L} = \{<\}$ und T die $\mathcal{L}$-Theorie diskreter Ordnungen ohne Endpunkte.
Angenommen $\mathcal{N} \models T$. Für $a, b \in N$ ist aEb, wenn b der n-te Vorgänger oder Nachvolger von a ist für ein $n \in \mathbb{N}$.

E-Klassen sind linear geordnete lineare Ordnungen, die aussehen wie $(\mathbb{Z}, <)$
$\Rightarrow$ Modelle von T sind von der Form $(L \times \mathbb{Z}, <)$ mit linearer Ordnung L und $<$ der lexikographischen Ordnung auf $L \times \mathbb{Z}$.

Beh: Es gilt für alle $\mathcal{L}$-Wörter ϕ, dass $T \models \phi \Leftrightarrow (\mathbb{Z}, <) \models \phi$.

Anwendungsbeispiel

Bew: Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathcal{N} = L \times \mathbb{Z}$ mit der lexikographischen Ordnung und einer beliebigen linearen Ordnung L
$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ gilt gdw II eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Anwendungsbeispiel

Bew: Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathcal{N} = L \times \mathbb{Z}$ mit der lexikographischen Ordnung und einer beliebigen linearen Ordnung L
$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ gilt gdw II eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definiere Entfernung zwischen $x = (i, a), y = (j, b) \in L \times \mathbb{Z}$ als $dist(x, y) = |b - a|$, wenn $i = j$ und $dist(x, y) = \infty$, wenn $i \neq j$.

Problem: I kann unendlich weit von einander entfernte Punkte in N wählen, II muss dann endlich weit von einander entfernte Punkte in M wählen.

Anwendungsbeispiel

Bew: Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathcal{N} = L \times \mathbb{Z}$ mit der lexikographischen Ordnung und einer beliebigen linearen Ordnung L
$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ gilt gdw II eine Gewinnstrategie in $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definiere Entfernung zwischen $x = (i, a), y = (j, b) \in L \times \mathbb{Z}$ als $dist(x, y) = |b - a|$, wenn $i = j$ und $dist(x, y) = \infty$, wenn $i \neq j$.

Problem: I kann unendlich weit von einander entfernte Punkte in N wählen, II muss dann endlich weit von einander entfernte Punkte in M wählen.

Lösung: II kennt die Anzahl der Runden, die gespielt werden, und kann sicherstellen, dass die Abstände der gewählten Zahlen in $\mathbb{Z}$ groß genug sind.

Anwendungsbeispiel

Angenommen es wurden schon m Runden gespielt, für $l \leq m$ seien $a_1, ..., a_l \in \mathbb{Z}$ und $b_1, ..., b_l \in L \times \mathbb{Z}$ die schon gespielten Elemente, sodass $a_i \mapsto b_i$ partielle Einbettung ist.

II muss sicherstellen, dass
$dist(b_i, b_{i+1}) > 3^{n-m} \Rightarrow dist(a_i, a_{i+1}) > 3^{n-m}$ und
$dist(b_i, b_{i+1}) = dist(a_i, a_{i+1}) \Rightarrow dist(a_i, a_{i+1}) < 3^{n-m}$

Anwendungsbeispiel

Angenommen es wurden schon m Runden gespielt, für $l \leq m$ seien $a_1, ..., a_l \in \mathbb{Z}$ und $b_1, ..., b_l \in L \times \mathbb{Z}$ die schon gespielten Elemente, sodass $a_i \mapsto b_i$ partielle Einbettung ist.

II muss sicherstellen, dass
$dist(b_i, b_{i+1}) > 3^{n-m} \Rightarrow dist(a_i, a_{i+1}) > 3^{n-m}$ und
$dist(b_i, b_{i+1}) = dist(a_i, a_{i+1}) \Rightarrow dist(a_i, a_{i+1}) < 3^{n-m}$

Für jedes neue $b \in L \times \mathbb{Z}$ tritt einer von 6 Fällen ein, wie sich b in die schon gespielten Elemente einordnet. Für jeden Fall gibt es eine Gewinnstrategie für II.