Brückenkurs ANA I und LA I im WS 06/07
Heiko Remling LA I,
Diana Kaminski ANA I
Fabian Schulte-Hengesbach

7. Der Satz von Taylor und die Taylor-Reihe

AUFGABE 1: Taylor-Reihen und das Restglied von Lagrange

Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes die Taylorreihen der folgenden Funktionen. Schätzen Sie das jeweilige Restglied der gefundenen Taylorreihe ab und zeigen Sie, dass die Beträge der Restglieder gegen Null konvergieren.

a) $\sin(x)$ um den Entwicklungspunkt 0,
b) $\ln(1+h)$ um den Entwicklungspunkt 0 mit $-1 < h \leq 1$

AUFGABE 2: Eine Anwendung der Restgliedabschätzung

Schätzen Sie das Restglied der Exponentialfunktion um Null ab und berechnen Sie mit dieser Abschätzung den folgenden Grenzwert.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sinh x}{x \sinh x}.$$

Hinweis: Verwenden Sie hierfür, die Formel

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

AUFGABE 3: Entwicklungspunkt einer Potenzreihe

Starten Sie mit der Potenzreihe der Exponentialfunktion entwickelt im Nullpunkt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

und finden Sie eine Umordnung der Potenzreihe um den Enwicklungspunkt a mit $a > 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k.$$

AUFGABE 4: Anwendung der Taylorapproximation

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ kann man durch den sogenannten "zentralen Differenzenquotienten"

$$D_h^{(1)} f(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

approximieren. Zeigen Sie, dass man den Fehler (der ist definiert als der Abstand von der genauen Ableitung $f'(x_0)$) durch die Formel

$$|D_h^{(1)} f(x_0) - f'(x_0)| \leq \frac{1}{6} h^2 \sup_{x \in (\mathrm{a,b})} |f^{(3)}(x)|$$

abschätzen kann, vorausgesetzt, dass f dreimal differenzierbar ist.
(Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung von $D_h^{(1)} f(x_0)$ mit Restglied.)

SELBSTTEST:

1. Was versteht man unter der Taylorapproximation n-ter Ordnung einer n-mal differenzierbaren Funktion f im Punkt a?
2. Was ist das Restglied von Lagrange und wie kann man es darstellen?
3. Welche Vorraussetzungen sind notwendig, um die Taylorreihe einer Funktion definieren zu können?
4. Was versteht man unter einem Entwicklungspunkt?
5. Wann konvergieren Taylorreihen ?
6. Nennen Sie ein Beispiel dafr, dass eine konvergente Taylorreihe einer Funktion im Entwicklungspunkt a nicht gegen die Funktion selbst konvergieren muß.
7. Schreiben Sie auswendig die Taylorreihen von mindestens drei Funktionen Ihrer Wahl auf!