

# Ein kinetisches Verfahren für die Savage-Hutter-Gleichungen

Diplomarbeit

vorgelegt von  
Christine Kaland

Betreuer: Prof. Dr. Struckmeier

Department Mathematik  
Universität Hamburg

Hamburg, im März 2007



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Herleitung der Gleichungen</b>	<b>5</b>
2.1	Die SH-Gleichungen für annähernd konstante Neigungswinkel . . . . .	5
2.2	Die SH-Gleichungen für glatte Bodenprofile . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Die kinetische Formulierung</b>	<b>15</b>
3.1	Der kinetische Hintergrund der Gasdynamik . . . . .	15
3.2	Kinetische Formulierung für die SH-Gleichungen . . . . .	19
3.3	Die transformierten SH-Gleichungen . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Ein balanciertes Verfahren in 1D</b>	<b>31</b>
4.1	Ein erstes mikroskopisches Verfahren . . . . .	32
4.2	Ein erstes makroskopisches Verfahren . . . . .	34
4.3	Die verbesserten Verfahren: Verfahren 2, 3 und 4 . . . . .	42
4.4	Ein gekoppeltes Verfahren: Verfahren 5 . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>51</b>
5.1	Konstante Gleichgewichtslösungen . . . . .	51
5.2	Klassisches Riemannproblem ohne Quellterm . . . . .	52
5.3	Riemannproblem mit Reibung . . . . .	55
5.4	Geneigtes Riemannproblem mit Reibung . . . . .	57
5.5	Parabolisches Anfangsprofil mit Reibung . . . . .	59

5.6 Beschleunigung eines sinusförmigen Profils . . . . .	60
<b>6 Fazit und Ausblick</b>	<b>63</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>65</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Schnee- und Gerölllawinen sowie Erdbeben verursachen regelmäßig hohe Sach- und Personenschäden. Daher ist es von großem Interesse, das Verhalten solcher granularer Materialien vorhersagen zu können. Überaus hilfreich ist es z.B. den Ort angeben zu können, an dem die betrachtete Masse zum Stehen kommt, damit auf solche Bedrohungen angemessen reagiert werden kann. Neben dem Umgang mit Naturgewalten spielt auch die industrielle Anwendung der Beschreibung granularer Materialien, wie z.B. das Befüllen von Getreidesilos, eine wichtige Rolle.

In [14] leiten Savage und Hutter ausgehend von den inkompressiblen Eulergleichungen ein Modell zur Beschreibung der Dynamik solcher granularer Massen auf einer sich örtlich nur langsam ändernden Bodentopographie unter Berücksichtigung von Reibeffekten her. Unter der Annahme, dass der innere Reibwinkel des Materials gleich dem Reibwinkel des Materials am Boden ist, lautet das System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \beta \frac{h^2}{2}) &= g h,\end{aligned}\tag{1.1}$$

mit

$$\beta = \varepsilon k \cos \zeta$$

und

$$g = g(u) = \sin \zeta - \operatorname{sgn}(u) \cos \zeta \tan \delta \quad \text{für } u \neq 0$$

in den beiden Unbekannten  $h, hu : \mathbb{R} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ . Die Größe  $h$  bezeichnet dabei die Höhe der granularen Masse und  $u$  die über die Höhe gemittelte Geschwindigkeit. Desweiteren beschreibt  $\zeta$  den Neigungswinkel der Bodentopographie gegenüber der Horizontalen,  $\delta$  den Reibwinkel des Materials am Boden,  $\varepsilon$  das Verhältnis von charakteristischer Höhe

zu charakteristischer Länge der betrachteten Masse und  $k$  einen sogenannten Erddruckkoeffizienten. Solange die Höhe  $h$  positiv bleibt, ist das System hyperbolisch, da es in diesem Fall zwei verschiedene reelle Eigenwerte besitzt.

Dieses Modell erweitern die Autoren in [15] auf hinreichend glatte Bodentopographien. In beiden Modellen wird der Effekt der Reibung durch ein einfaches Coulombsches Reibungsmodell beschrieben. Andere Reibungsmodelle sind denkbar, werden aber in dieser Arbeit nicht behandelt.

Die in [14] und [15] hergeleiteten Gleichungen werden Savage-Hutter-Gleichungen und im folgenden nur noch SH-Gleichungen genannt. Der Einfluss der Bodentopographie sowie die Reibung resultieren in einem Quellterm in der zweiten Gleichung, durch den das Modell aus [14] seine Erhaltungseigenschaft verliert. Das erweiterte Modell aus [15] lässt sich von vornherein aufgrund der expliziten Abhängigkeit der Flussfunktion von der Ortsvariablen  $x$  nicht in Erhaltungsform schreiben. Der Quellterm sorgt für zusätzliche Schwierigkeiten: durch ihn treten nichtkonstante Gleichgewichtslösungen auf, die durchaus physikalisch sinnvoll sein können. Im Gegensatz zu anderen Modellen für Fließprozesse mit Quellterm, wie z.B. den Flachwassergleichungen, gibt es sogar beliebig viele solcher Gleichgewichtslösungen. In den Größen  $h$  und  $u$  werden diese Lösungen nämlich gerade durch die Bedingung

$$\partial_t h = 0, \quad u = 0 \tag{1.2}$$

beschrieben. Es handelt sich bei den physikalisch sinnvollen Gleichgewichtslösungen also um ruhende granulare Massen. Setzt man (1.2) in die Gleichungen (1.1) ein, so erhält man die Beziehung

$$\beta \partial_x h = g$$

für diese ruhenden Massen. Aufgrund der Reibung, die in den SH-Gleichungen berücksichtigt wird, muss man für ruhende Massen gemäß (1.2) Haftreibung statt Gleitreibung betrachten. Von dieser Haftreibung weiß man allerdings nur, dass sie betragsmäßig höchstens so groß wie die Gleitreibung werden kann. Der Quellterm und damit die Gleichgewichtslösungen sind für  $u = 0$  also nicht eindeutig bestimmt, man kann aber eine recht einfache Bedingung an die Gradienten eines Höhenprofils  $h$  angeben, unter der sich das betrachtete Profil im Gleichgewicht befindet. Solche Profile werden im Folgenden als zulässig bezeichnet. Genauere Untersuchungen zu diesem Thema sowie eine Definition zulässiger Profile findet sich in Kapitel 4.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein auf einem kinetischen Ansatz basierendes numerisches Verfahren zu konstruieren, das in der Lage ist, eben diese Gleichgewichtslösungen einer ruhenden Masse zu erhalten, sowie die Dynamik des Anrutschens und Stoppens allgemeinerer Lösungen zu beschreiben. Daneben wird sich zeigen, dass die hier konstruierte Methode

unter bestimmten Voraussetzungen die Höhe der betrachteten Masse nichtnegativ hält.

Die Arbeit ist in sechs Kapitel unterteilt. Im zweiten Kapitel werden die SH-Gleichungen für den Fall annähernd konstanter Neigungswinkel ausführlich hergeleitet. Für den allgemeineren Fall werden lediglich die grundsätzlichen Ideen zur Herleitung des Modells genannt. Ein kurzer Überblick über die kinetische Theorie der Gasdynamik wird im ersten Abschnitt von Kapitel 3 gegeben, gefolgt von der (semi-)kinetischen Formulierung der SH-Gleichungen. In Kapitel 4 wird daraus in mehreren Schritten ein konservatives und konsistentes Verfahren konstruiert, das die gewünschten Eigenschaften

- der Beschreibung des Anrutschens und Stoppens granularer Massen,
- der Erhaltung von Gleichgewichtslösungen ruhender granularer Massen,
- sowie der Erhaltung der Nichtnegativität der Höhe  $h$  (zumindest in dem Bereich, in dem sich die Masse stark bewegt)

besitzt. Dieses Verfahren wird schließlich in Kapitel 5 an mehreren Beispielen getestet. In Kapitel 6 findet sich ein Überblick der Erkenntnisse dieser Arbeit sowie ein Ausblick auf Erweiterungen und Verbesserungen des vorgestellten Verfahrens. Darüber hinaus wird kurz auf alternative Modelle und Verfahren eingegangen.





# Kapitel 2

## Herleitung der Gleichungen

In diesem Abschnitt sollen die SH-Gleichungen zunächst für den Fall eines sich örtlich nur langsam ändernden Neigungswinkels des betrachteten Hanges ausführlich hergeleitet werden (siehe [14]). Anschließend folgt ein kurzer Abschnitt über die SH-Gleichungen für allgemeinere Bodenprofile. Eine detaillierte Herleitung dieser Gleichungen findet sich in [15].

### 2.1 Die SH-Gleichungen für annähernd konstante Neigungswinkel

Für die Herleitung der SH-Gleichungen mit einem sich örtlich nur langsam ändernden, zeitlich konstanten Bodenprofil betrachtet man eine in den kartesischen Koordinaten  $\mathbf{X} = (X, Y)$  um den konstanten Winkel  $\zeta$  geneigte Ebene. Auf dieser schiefen Ebene befindet sich nun eine Bodentopographie  $B(\mathbf{X}) = 0$ . Das Profil der granularen Masse wird dann allein durch ihre freie Oberfläche  $S_f(\mathbf{X}, t) = 0$  beschrieben (Abb. 2.1).

Den Ausgangspunkt der Herleitung des Modells bilden die inkompressiblen Euler-Gleichungen der Gasdynamik zur Beschreibung der Massen- und Momentenerhaltung in der Form

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 , \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= -\nabla \cdot \mathbf{p} + \rho \mathbf{g} . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei ist  $\mathbf{u} = (u, v)^T \in \mathbb{R}^2$  der Geschwindigkeitsvektor, der für diese Herleitung als ungleich Null angenommen wird,  $\rho \in \mathbb{R}$  die Dichte,  $\mathbf{p}$  der Drucktensor und  $\mathbf{g} = (0, g)^T \in \mathbb{R}^2$  der Erdbeschleunigungsvektor mit der skalaren Erdbeschleunigung  $g$ .

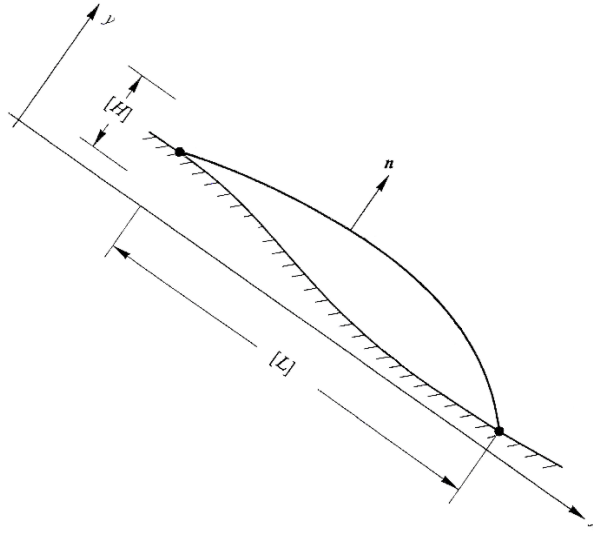


Abbildung 2.1: Ein sich örtlich nur langsam änderndes Bodenprofil mit granularer Masse.

In [14] erläutern die Autoren diese Wahl des Modells, welches z. B. Dichteänderungen aufgrund von Lufteinschlüssen in Lawinen oder anderen granularen Materialien vernachlässigt.

Zusätzlich zu diesen Gleichungen betrachtet man nun Randbedingungen zum einen an der freien Oberfläche und zum anderen am Boden. Bezeichnet  $\mathbf{n}$  den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor und  $\mathbf{u}_s$  die Gleitgeschwindigkeit relativ zum Boden, so kommt man schnell auf die folgenden Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \partial_t S_f + \nabla S_f \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } S_f(\mathbf{X}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) &= -\frac{\mathbf{u}_s}{|\mathbf{u}_s|}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \tan \delta, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } B(\mathbf{X}) = 0. \quad (2.3)$$

Die erste Gleichung ist die Materialableitung der Oberfläche und die zweite Bedingung beschreibt die dort herrschende Druckfreiheit. Für die dritte Zeile wurde ein einfaches Gleitreibungsgesetz  $|R| = |N_R| \mu$  für die Reibkraft  $R$ , die Normalkraft  $N_R$  und den Gleitreibungskoeffizienten  $\mu$  verwendet. Wendet man dieses Reibgesetz auf die Normal- und Schubspannungen an und verwendet man  $\mu = \tan \delta$  mit dem Reibungswinkel  $\delta$  am Boden, so erhält man die dritte Bedingung. Die letzte Gleichung besagt, dass sich das Material immer tangential zum Bodenprofil bewegt.

Führt man nun die gegenüber den ursprünglichen Koordinaten  $(X, Y)$  um den konstanten

Winkel  $\zeta$  geneigten kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x} = (x, y)$  ein (Abb. 2.1), so lassen sich die Gleichungen (2.1) wie folgt schreiben:

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (2.4)$$

$$\rho(\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u) = \rho g \sin \zeta - \partial_x p_{xx} - \partial_y p_{xy}, \quad (2.5)$$

$$\rho(\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v) = -\rho g \cos \zeta - \partial_x p_{xy} - \partial_y p_{yy}. \quad (2.6)$$

Als nächstes sollen die Gleichungen entdimensionalisiert werden. Dazu gelte für die dimensionslosen, mit einem Stern versehenen Größen der folgende Zusammenhang zu den bisher betrachteten, dimensionsbehafteten Größen:

$$\begin{aligned} (x, y) &= ([L] x^*, [H] y^*), \\ t &= \left[ \sqrt{\frac{L}{g}} \right] t^*, \\ (u, v) &= \left( [\sqrt{gL}] u^*, \left[ \frac{H}{L} \sqrt{gL} \right] v^* \right), \\ (p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}) &= [\rho g H \cos \zeta] (p_{xx}^*, p_{yy}^*, p_{xy}^* \tan \zeta). \end{aligned} \quad (2.7)$$

$L$  und  $H$  bezeichnen hierbei die charakteristische Länge bzw. Höhe der rutschenden Masse. Das Verhältnis  $\varepsilon = H/L$  wird dabei als klein und die dimensionslosen Größen von der Ordnung Eins angenommen. Im Folgenden werden die freie Oberfläche sowie die Bodentopographie bzgl. des neuen Koordinatensystems mit  $y = h(x, t)$  bzw.  $y = b(x)$  beschrieben. Für die skalierten Größen gelte dann

$$\begin{aligned} h(x, t) &= [H] h^*(x^*, t^*), \\ b(x) &= [H] b^*(x^*). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nimmt man nun an, dass sich sowohl die Bodentopographie als auch die freie Oberfläche nur langsam im Ort ändern, dass also  $\partial h / \partial x$  und  $db / dx$  von der Ordnung  $\varepsilon$  sind, so erhält man wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{[H]}{[L]} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = \varepsilon \frac{\partial h^*}{\partial x^*}, \\ \frac{db}{dx} &= \frac{[H]}{[L]} \frac{db^*}{dx^*} = \varepsilon \frac{db^*}{dx^*}, \end{aligned}$$

dass  $\partial h^*/\partial x^*$  und  $db^*/dx^*$  von der Ordnung Eins sind. Die Größen  $h^*$  und  $b^*$  werden natürlich auch als Funktionen der Ordnung Eins betrachtet.

Im Folgenden werden nur noch die dimensionslosen Größen betrachtet und die Sterne zu ihrer Kennzeichnung der Einfachheit halber weggelassen. Für die skalierten Größen lassen sich die Gleichungen (2.4) – (2.6) nun wie folgt schreiben:

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (2.9)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = \sin \zeta (1 - \partial_y p_{xy}) - \varepsilon \cos \zeta \partial_x p_{xx}, \quad (2.10)$$

$$\varepsilon (\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v) = -\cos \zeta (1 + \partial_y p_{yy}) - \varepsilon \sin \zeta \partial_x p_{xy}. \quad (2.11)$$

Für die Materialableitung am Boden und an der Oberfläche gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \partial_t h + u \partial_x h &= v \quad \text{in } y = h(x, t) \\ u \frac{db}{dx} &= v \quad \text{in } y = b(x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Gleichungen (2.9) – (2.11) sollen nun über die Höhe integriert werden, also von  $y = b$  bis  $y = h$ .

Mit Hilfe der gemittelten Größen

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\tilde{h}} \int_b^h u \, dy, \\ \bar{p}_{xx} &= \frac{1}{\tilde{h}} \int_b^h p_{xx} \, dy, \\ \bar{p}_{yy} &= \frac{1}{\tilde{h}} \int_b^h p_{yy} \, dy, \\ \overline{u^2} &= \frac{1}{\tilde{h}} \int_b^h u^2 \, dy \end{aligned} \quad (2.13)$$

und  $\tilde{h} = h - b$  erhält man dann unter Ausnutzung von (2.12) für (2.9)

$$\begin{aligned} \int_b^h (\partial_x u + \partial_y v) \, dy &= \partial_x \left( \int_b^h u \, dy \right) - (\partial_x h) u|_{y=h} + \left( \frac{db}{dx} \right) u|_{y=b} + v|_{y=h} - v|_{y=b} \\ &= \partial_x (\tilde{h} \bar{u}) + \partial_t h \\ &= \partial_t \tilde{h} + \partial_x (\tilde{h} \bar{u}). \end{aligned}$$

Für die linke Seite von (2.10) gilt analog

$$\begin{aligned}
\int_b^h (\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u) dy &= \partial_t \left( \int_b^h u dy \right) - (\partial_t h) u|_{y=h} \\
&\quad + \int_b^h u \partial_x u dy + (vu)|_{y=b}^{y=h} - \int_b^h \underbrace{u \partial_y v}_{=-u \partial_x u} dy \\
&= \partial_t \left( \int_b^h u dy \right) - (\partial_t h) u|_{y=h} + 2 \int_b^h u \partial_x u dy + (vu)|_{y=b}^{y=h} \\
&= \partial_t \left( \int_b^h u dy \right) + \partial_x \left( \int_b^h u^2 dy \right) - \left[ u(\partial_t h + u \partial_x h - v) \right]_{y=h} \\
&\quad + \left[ u \left( u \frac{db}{dx} - v \right) \right]_{y=b} \\
&= \partial_t(\tilde{h}\bar{u}) + \partial_x(\tilde{h}\bar{u}^2) .
\end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass  $u$  in  $y$  ungefähr konstant ist, weswegen  $\overline{u^2} \approx \bar{u}^2$  gilt. Setzt man also die beiden Größen  $\overline{u^2}$  und  $\bar{u}^2$  gleich, so ist mit einem nur kleinen Fehler zu rechnen.

Die rechte Seite von (2.10) wird zu

$$\sin \zeta \left[ \tilde{h} - p_{xy}|_{y=h} + p_{xy}|_{y=b} \right] - \varepsilon \cos \zeta \left[ \partial_x \left( \int_b^h p_{xx} dy \right) - (\partial_x h) p_{xx}|_{y=h} + \frac{db}{dx} p_{xx}|_{y=b} \right] .$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Ausdrucks schreibt man nun die Bedingung der Druckfreiheit an der Oberfläche (die zweite Zeile von (2.2)) in den geeigneten Koordinaten. Anschließende Skalierung führt zu

$$\left. \begin{aligned}
-\varepsilon \cos \zeta p_{xx} \partial_x h + \sin \zeta p_{xy} &= 0 \\
-\varepsilon \sin \zeta p_{xy} \partial_x h + \cos \zeta p_{yy} &= 0
\end{aligned} \right\} \text{ in } y = h(x, t) . \quad (2.14)$$

Die erste Bedingung in (2.3) lässt sich schreiben als

$$p_{xy} = -\text{sgn}(\bar{u}) p_{yy} \cot \zeta \tan \delta \quad \text{in } y = b(x) , \quad (2.15)$$

wobei für die Geschwindigkeit  $\bar{u} \neq 0$  gelte. Darüber hinaus wird die Masse wie schon erwähnt als kohäsionsloses Mohr-Coulombsches Material mit einem inneren Reibwinkel  $\varphi$  angenommen. Für die einzelnen Elemente der granularen Masse gelte wieder das Coulombsche Reibgesetz, d.h. ein Gleiten der einzelnen Elemente tritt genau dann ein, wenn

$|S_e| \geq N_e \tan \varphi$  mit den an dem jeweiligen Element wirkenden Schub- und Normalspannungen  $S_e$  und  $N_e$ .

Zusätzlich nimmt man an, dass die Normalspannungen  $p_{xx}$  und  $p_{yy}$  über einen sogenannten Erddruckkoeffizienten  $k = k_{aktiv,passiv}$  gemäß

$$p_{xx} = k p_{yy} \quad (2.16)$$

zusammenhängen. Je nachdem, ob das betrachtete Element gerade ausgedehnt (d.h. die an ihm wirkenden Schubkräfte sind größer als die Normalkräfte) bzw. komprimiert wird (die Schubkräfte sind kleiner als die Normalkräfte), nimmt der Erddruckkoeffizient den Wert  $k_{aktiv}$  bzw.  $k_{passiv}$  an. Dieses Verhalten kann man sich anhand eines Mohrschen Spannungskreises graphisch veranschaulichen (siehe [14]) und erhält für den Erddruckkoeffizienten

$$k_{aktiv,passiv} = \left[ 2 \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \delta}} \right) / \cos^2 \varphi \right] - 1 \quad \text{für } \partial_x \bar{u} \gtrless 0 . \quad (2.17)$$

Die Gleichungen (2.14) und (2.16) ergeben zusammen

$$p_{xx} = p_{xy} = p_{yy} = 0 \quad \text{in } y = h(x, t) . \quad (2.18)$$

Gilt nun für den inneren Reibwinkel und den Reibwinkel am Boden  $\varphi = \delta$ , dann ist  $k = 1 + 2 \tan^2 \varphi$  konstant. Zusammen mit (2.15) und (2.18) erhält man für (2.10)

$$\begin{aligned} \partial_t(\tilde{h}\bar{u}) + \partial_x(\tilde{h}\bar{u}^2) &= \sin \zeta \left[ \tilde{h} + p_{xy}|_{y=b} \right] - \varepsilon \cos \zeta \left[ \partial_x(\tilde{h}\bar{p}_{xx}) + \left( \frac{db}{dx} \right) p_{xx}|_{y=b} \right] \\ &= \sin \zeta \tilde{h} - \varepsilon k \cos \zeta \left[ \partial_x(\tilde{h}\bar{p}_{yy}) + \left( \frac{db}{dx} \right) p_{yy}|_{y=b} \right] \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\bar{u}) \cos \zeta \tan \delta p_{yy}|_{y=b} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die Grenzwertbildung in (2.11) für  $\varepsilon \rightarrow 0$  führt auf

$$p_{yy}(x, y, t) = h(x, t) - y , \quad (2.20)$$

woraus

$$p_{yy}(x, b, t) = h(x, t) - b(x) = \tilde{h}(x, t)$$

und

$$\tilde{h} \bar{p}_{yy}(x, t) = \int_b^h p_{yy}(x, y, t) dy = \int_b^h (h(x, t) - y) dy = \frac{1}{2} \tilde{h}^2(x, t)$$

folgt.

Damit vereinfacht sich (2.19) nochmals zu

$$\partial_t(\tilde{h}\bar{u}) + \partial_x(\tilde{h}\bar{u}^2) = \left[ \sin \zeta - \operatorname{sgn}(\bar{u}) \cos \zeta \tan \delta \right] \tilde{h} - \varepsilon k \cos \zeta \left[ \partial \left( \frac{\tilde{h}^2}{2} \right) + \frac{db}{dx} \tilde{h} \right]. \quad (2.21)$$

Insgesamt erhält man das für  $\tilde{h} > 0$  hyperbolische System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \beta \frac{h^2}{2}) &= gh, \end{aligned} \quad (2.22)$$

wobei statt  $\tilde{h}$  und  $\bar{u}$  wieder  $h$  und  $u$  geschrieben wurde. Weiter sind

$$\beta = \varepsilon k \cos \zeta$$

und

$$g = g(u) = \sin \zeta - \operatorname{sgn}(u) \cos \zeta \tan \delta \quad \text{für } u \neq 0.$$

Im nächsten Abschnitt wird kurz auf die Herleitung der SH-Gleichungen mit variablem Neigungswinkel  $\zeta = \zeta(x)$  und  $\beta = \beta(x)$  eingegangen. Obwohl im folgenden Kapitel die kinetische Formulierung für beide Fälle  $\beta = \text{const}$  und  $\beta = \beta(x)$  angegeben wird, kann die später eingeführte Funktion  $\chi$  nur für ersteren Fall mit dem in dieser Arbeit verfolgten Ansatz bestimmt werden. Ab Kapitel 4 wird dann ausschließlich der Fall  $\beta = \text{const}$  betrachtet.

## 2.2 Die SH-Gleichungen für glatte Bodenprofile

Die Herleitung der Gleichungen für allgemeinere glatte Bodentopographien ist der obigen Herleitung sehr ähnlich, weswegen hier nur die wesentlichen Unterschiede genannt werden sollen. Eine detailliertere Beschreibung findet sich in [15].

Lässt man allgemeinere Bodenprofile zu, so ist der oben eingeführte Neigungswinkel  $\zeta$  nicht mehr konstant, es gilt vielmehr  $\zeta = \zeta(x)$ . Dies führt zu der Idee, die Gleichungen (2.1) sowie die Bedingungen (2.2) und (2.3) nicht mehr bezüglich des oben angegebenen geneigten Koordinatensystems, sondern bezüglich kurvenlinearer, dem Bodenprofil folgenden Koordinaten zu beschreiben (siehe Abb.2.2).

Durch die kurvenlinearen Koordinaten erhält man als zusätzliche Größe in den Gleichungen die Krümmung

$$\kappa = \kappa(x)$$

und dadurch einen weiteren Skalierungsparameter: den charakteristischen Krümmungsradius der Bodentopographie  $R$ . Mit diesem wird die Krümmung wie folgt skaliert

$$\kappa = \frac{\kappa^*}{R} .$$

Ansonsten ändert sich die Skalierung der Gleichungen verglichen mit der aus dem vorherigen Abschnitt nicht. Die Größe

$$\eta = \frac{L}{R}$$

wird auch charakteristische Krümmung genannt.

Eine anschließende Mittelung über die Höhe liefert die beiden Gleichungen

$$(1 - \varepsilon \eta \kappa h) \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 , \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\varepsilon \eta \kappa h}{2}\right) \partial_t u + \left(1 + \frac{\varepsilon \eta \kappa h}{2}\right) u \partial_x u &= \left(1 - \frac{\varepsilon \eta \kappa h}{2}\right) \sin \zeta - \frac{\varepsilon h}{2} \partial_x (k(\cos \zeta + \eta \kappa u^2)) \\ &- (\cos \zeta + \eta \kappa u^2) \left[ \left(1 + \frac{\varepsilon \eta \kappa h}{2}\right) \operatorname{sgn}(u) \tan \delta + \varepsilon k \partial_x h \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit dem Erddruckkoeffizienten

$$k = k_{aktiv,passiv}$$

wie im letzten Abschnitt.



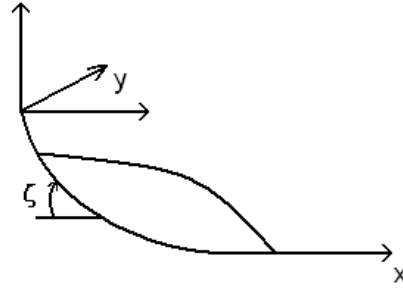


Abbildung 2.2: Granulare Masse in kurvenlinearen Koordinaten

Vernachlässigt man nun in den Gleichungen (2.23) und (2.24) alle Terme von höherer Ordnung als  $\varepsilon$ , so erhält man je nach Größenwahl der beiden Parameter  $\tan \delta$  und  $\eta$  unterschiedliche Gleichungen, in denen die Krümmung der Bodentopographie entweder berücksichtigt wird oder wegfällt. Wählt man z.B.

$$\eta = O(\varepsilon^\alpha)$$

mit  $\alpha > 0$  und

$$\tan \delta = O(\varepsilon) ,$$

so erhält man annähernd dasselbe System partieller Differentialgleichungen wie oben (vgl. (2.22)) mit dem Unterschied, dass der Neigungswinkel  $\zeta$  nun von  $x$  abhängt, also  $\zeta = \zeta(x)$  und damit  $\beta = \beta(x)$  gilt.

Lässt man dagegen Werte höherer Ordnung insbesondere für  $\tan \delta$  zu, z.B.

$$\eta = O(\varepsilon^{1/2})$$

und

$$\tan \delta = O(\varepsilon^{1/2}) ,$$

so erhält man nach (2.23) und (2.24) das folgende System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0 , \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \beta \frac{h^2}{2}) &= gh , \end{aligned} \tag{2.25}$$

mit

$$\beta = \beta(x) = \varepsilon k \cos \zeta(x)$$

und

$$g = g(u, x) = \sin \zeta(x) - \operatorname{sgn}(u) \tan \delta (\cos \zeta(x) + \eta \kappa u^2) \quad \text{für } u \neq 0 .$$

# Kapitel 3

## Die kinetische Formulierung

In diesem Kapitel sollen einige Grundlagen der kinetischen Theorie für hyperbolische Gleichungen genannt sowie die kinetische Formulierung für die SH-Gleichungen hergeleitet werden. Die Grundlagen der klassischen Gastheorie werden dabei recht kurz behandelt, eine detailliertere Beschreibung findet man in [4].

### 3.1 Der kinetische Hintergrund der Gasdynamik

Die in der Herleitung der SH-Gleichungen verwendeten Eulergleichungen beschreiben die Dynamik inkompressibler Gase und Fluide. Allgemeiner lauten die Eulergleichungen

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix} + \operatorname{div} \begin{pmatrix} m \\ m \otimes \frac{m}{\rho} + p I \\ E \frac{m}{\rho} + p I \frac{m}{\rho} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

in den Unbekannten Massendichte  $\rho$ , Impulsdichte  $m$  und Energiedichte  $E = \rho(e + \frac{1}{2}v^2)$  mit der Geschwindigkeit  $u$ , der Dichte der inneren Energie  $e = \frac{1}{\gamma-1}T$ , der Temperatur  $T$ , dem Druck  $p = \rho T$  und dem Isentropenexponent  $\gamma \geq 1$ .

Für den Spezialfall einatomiger Gase ( $\gamma = 5/3$ ) lassen sich die Gleichungen (3.1) relativ einfach aus einem kinetischen Stoßmodell für die einzelnen Teilchen des Gases ableiten. Dazu stellt man sich ein System aus  $N$  Atomen des Gases vor. Die Atome werden als harte Kugeln eines festen Durchmessers angenommen. Man geht davon aus, dass die Dynamik des Systems aus den elastischen Kollisionen dieser Kugeln resultiert. Der Zustand  $z$  des Systems im Phasenraum  $\Omega$  werde durch den Aufenthaltsort  $x_i \in \mathbb{R}^3$ , sowie durch die Geschwindigkeit  $\xi_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, \dots, N$ , eines jeden Teilchens beschrieben. Der Phasenraum ist also von der Dimension  $6N$ , d.h. in der Regel sehr groß. Zur weiteren Beschreibung geht

man deshalb auf eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(z, t)$  über, mit der man die Wahrscheinlichkeit, dass das System zur Zeit  $t$  einen Zustand  $z$  aus einer Teilmenge  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  annimmt, als

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(z, t) dz$$

angeben kann.

Führt man die Überlegungen der Kollisionen einzelner Teilchen nun für die Dichte  $f$  fort, so kommt man zunächst auf die Liouville-Gleichung

$$\partial_t f + \sum_{i=1}^N \xi_i \partial_{x_i} f = 0, \quad f(z, 0) = f_0(z)$$

für Zustände  $z$  aus einem Gebiet  $\bar{\Omega}$ , das man so gewählt hat, dass dort keine Kollisionen stattfinden. Diese werden vielmehr durch geeignete Randbedingungen behandelt. Betrachtet man anschließend statt der Dichte  $f(z, t)$  für den Zustand des Gesamtsystems die Dichte  $f_1(x, \xi, t)$  zur Beschreibung des Zustandes eines einzelnen Teilchens, so kommt man nach einigen weiteren Überlegungen auf die Boltzmann-Gleichung

$$\partial_t f_1 + \xi \nabla_x f_1 = Q(f_1, f_1), \quad (3.2)$$

in der die Kollisionen durch den Kollisionsoperator

$$Q(f_1, f_1) = \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_S (f'_1 f'_{1*} - f_1 f_{1*}) |(\xi - \xi_*) n| dn d\xi_*$$

beschrieben werden. Die Größe  $x \in \mathbb{R}^3$  beschreibt dabei wieder den Ort,  $\xi \in \mathbb{R}^3$  die Geschwindigkeit des Teilchens. Außerdem sind

$$\begin{aligned} f_{1*} &= f_1(x, \xi_*, t), \\ f'_1 &= f_1(x, \xi', t), \\ f'_{1*} &= f_1(x, \xi'_*, t), \\ \xi' &= \xi - n(n^T(\xi - \xi_*)), \\ \xi'_* &= \xi_* + n(n^T(\xi - \xi_*)), \\ \alpha &= n^T(\xi - \xi_*), \end{aligned}$$

wobei die gestrichelten Größen diejenigen nach der Kollision bezeichnen und der Stern zur Unterscheidung der beiden miteinander kollidierenden Teilchen dient. Desweiteren ist  $S$

die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^3$  mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor  $n$ . Für eine genauere Darstellung sei auf [4] verwiesen.

Die Boltzmann-Gleichung ist also eine partielle nichtlineare Integro-Differentialgleichung für die „Zustands“-Dichte  $f_1$  eines einzelnen Teilchens. Besonders interessante Verteilungen sind offensichtlich diejenigen, für die der Kollisionsoperator verschwindet, d.h.

$$Q(f_1, f_1) = 0 . \quad (3.3)$$

Solche Verteilungen sind die sogenannten Maxwell-Verteilungen, sie sind von der Form

$$f_{Max}(x, \xi, t) = \exp(a(x, t) + b^T(x, t) \xi + c(x, t) |\xi|^2)$$

mit  $a, c : \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b : \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Wegen (3.3) bezeichnet man diese Verteilungen oft als Gleichgewichtsverteilungen. Terme der Gestalt

$$\Phi(\xi) = a + b^T \xi + c |\xi|^2$$

mit  $a, b$  und  $c$  wie oben nennt man Kollisionsinvarianten. Für sie gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\xi) Q(f, f) d\xi = 0 .$$

Der Übergang zu den makroskopischen Größen  $\rho$ ,  $m$  und  $E$  der Eulergleichungen erfolgt nun durch Integration der Teilchendichte  $f$  über die mikroskopische Geschwindigkeit  $\xi$  :

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f d\xi , \quad m = \int_{\mathbb{R}^3} \xi f d\xi , \quad E = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi^2}{2} f d\xi . \quad (3.4)$$

Multipliziert man also die Boltzmann-Gleichung (3.2) mit 1,  $\xi$  und  $\frac{1}{2}\xi^2$ , integriert anschließend über  $\xi$ , wobei man Integration und Differentiation vertauscht, und nimmt man an, dass  $f$  eine Maxwell-Verteilung ist, so erhält man die Eulergleichungen der Gasdynamik gegeben durch (3.1). An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Funktionen  $a$ ,  $b$  und  $c$  durch die Beziehung (3.4) eindeutig festgelegt sind. So erhält man z.B. für ein einatomiges ideales Gas unter Ausnutzung von  $T = \frac{2}{3}e$  die Maxwell-Verteilung

$$f_{Max} = \frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\xi - u|^2}{2T}\right) .$$

Allerdings gilt der eben besprochene Zusammenhang zwischen der Boltzmann-Gleichung und den Eulergleichungen nur in den Punkten  $(x, t)$ , in denen  $f$  eine Maxwell-Verteilung ist. Die Herleitung für den allgemeinen Fall macht Gebrauch von den sogenannten hydrodynamischen Limiten. Dazu nimmt man an, dass die Teilchendichte  $f$  eine Entwicklung der Form

$$f(x, \xi, t) = f_{Max}(x, \xi, t) + \varepsilon f_1(x, \xi, t) + O(\varepsilon^2)$$

besitzt,  $f$  soll also lokal eine Maxwell-Verteilung sein. Auf diese Herleitung wird hier nicht weiter eingegangen, für Details siehe [4]. Es sei allerdings noch angemerkt, dass die räumlich homogenen Maxwell-Verteilungen  $f_{Max}(x, \xi, t) = f_{Max}(\xi, t)$  nach den obigen Überlegungen auf Gleichgewichtslösungen, also zeitlich konstante Lösungen führen. Bildet man nämlich den Übergang von der mikroskopischen Teilchendichte  $f_{Max}(\xi, t)$  zu den makroskopischen Größen mittels Integration wie oben, so sind die makroskopischen Größen natürlich auch räumlich homogen. In den Eulergleichungen fallen also die Divergenzterme einfach weg und man erhält

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix} = 0 ,$$

die makroskopischen Größen ändern sich zeitlich also nicht.

Die kinetische Theorie für granulare Gase ist weitaus komplexer als die eben besprochene. Viele der in der klassischen Gastheorie getroffenen Annahmen gelten für granulare Gase nicht mehr. Die klassische Gastheorie behandelt die Energie erhaltende Dynamik elastisch stoßender Partikel. In der Theorie granularer Gase dagegen muss man inelastische Kollisionen der einzelnen Teilchen betrachten (siehe [3]). Die Partikel können sich durch Kollisionen verformen und geben die dabei frei gesetzte Energie z. B. in Form von Wärme ab. Thermodynamisch gesehen bilden solche Partikel also offene Systeme. Darüber hinaus erweist sich die Annahme des molekularen Chaos hier als falsch (siehe [3]). Eine Einführung in die kinetische Theorie granularer Gase findet sich z. B. in [2] und [3].

## 3.2 Kinetische Formulierung für die SH-Gleichungen

In diesem Abschnitt soll eine kinetische Formulierung für die SH-Gleichungen nach den obigen Überlegungen konstruiert werden. Dabei wird für die mikroskopische Teilchendichte  $M(x, \xi, t)$  derselbe Ansatz wie in [12] für die Flachwassergleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) + gh \partial_x Z &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gemacht, wobei  $g$  für die Erdbeschleunigung steht und  $Z = Z(x)$  für eine gegebene Bodentopographie. In [12] suchen die Autoren eine Teilchendichte  $M(x, \xi, t) = M[h, hu](\xi) = M(h, \xi - u)$ , die den Bedingungen

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix} M(h, \xi - u) d\xi \quad (3.6)$$

genügt. Die makroskopischen Größen  $h$  und  $hu$  sollen also analog zu oben aus Integration der Dichte  $M$  hervorgehen. Weiter machen die Autoren den Ansatz

$$M(h, \xi - u) = \sqrt{h} \chi\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{h}}\right) \quad (3.7)$$

mit einer nichtnegativen Funktion  $\chi$ , die die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \chi(-\omega), \\ \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega &= 1, \\ \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega &= \frac{g}{2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

besitzt.

Der Nachweis dafür, dass eine Funktion  $M$  von der Gestalt (3.7) die Bedingungen (3.6) erfüllt, ist sehr schnell erbracht. Tatsächlich berechnen sich das nullte bis zweite Moment von  $M$  bezüglich  $\xi$  mit Hilfe der Substitution  $\omega := (\xi - u)/\sqrt{h}$  und unter Verwendung der Eigenschaften (3.8) zu

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} M(h, \xi - u) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{h} \chi\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{h}}\right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{h} \chi(\omega) \sqrt{h} d\omega \\
&= h \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega \\
&= h ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \xi M(h, \xi - u) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \xi \sqrt{h} \chi\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{h}}\right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{h}\omega + u) \sqrt{h} \chi(\omega) \sqrt{h} d\omega \\
&= h^{3/2} \int_{\mathbb{R}} \omega \chi(\omega) d\omega + hu \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega \\
&= hu \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega \\
&= hu ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \xi^2 M(h, \xi - u) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \sqrt{h} \chi\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{h}}\right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{h}\omega + u)^2 \sqrt{h} \chi(\omega) \sqrt{h} d\omega \\
&= h^2 \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega + 2 h^{3/2} u \int_{\mathbb{R}} \omega \chi(\omega) d\omega + hu^2 \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega \\
&= hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 .
\end{aligned}$$

Die Funktion  $\chi$  wird in [12] dann durch die Forderung nach Erhaltung der physikalisch sinnvollen Gleichgewichtslösung  $h(x) + Z(x) = \text{const}$  und  $u = 0$  festgelegt.

Derselbe Ansatz soll hier auch gemacht werden. Es erscheint zunächst sinnvoll, als eine Verallgemeinerung des Ansatzes in [12] die Klasse der Verteilungen  $M(x, \xi, t) = M[h, hu, \beta](\xi) = M(h, \xi - u, \beta)$  mit der Eigenschaft

$$\begin{pmatrix} h \\ hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}\beta h^2 \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix} M(h, \xi - u, \beta) d\xi , \quad (3.9)$$

zu betrachten.



Dabei sei analog zu (3.7)

$$M(h, \xi - u, \beta) = \sqrt{h} \chi\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{h}}, \beta\right), \quad (3.10)$$

mit einer Funktion  $\chi$ , für die

$$\begin{aligned} \chi(\omega, \beta) &= \chi(-\omega, \beta) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} \chi(\omega, \beta) d\omega &= 1 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega, \beta) d\omega &= \frac{\beta}{2} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.11)$$

gelte.

An dieser Stelle kann man einen entscheidenden Unterschied zu dem Ansatz aus [12] feststellen: durch die dritte Bedingung an  $\chi$  in (3.11) ist die explizite Abhängigkeit der Funktion  $\chi$  von  $\beta(x)$  notwendig. Die Autoren in [12] können sich auf eine Funktion  $\chi$  von nur einer Variablen beschränken. Die Wahl einer Funktion  $\chi(\omega, \beta)$  wird spätestens bei der konkreten Festlegung durch die Forderung nach Erhaltung von stationären Lösungen problematisch werden. Der Grund dafür liegt in der zusätzlichen  $x$ -Abhängigkeit der Funktion  $\chi$ . Bleibt man nämlich bei dem Ansatz einer Funktion  $\chi(\omega, \beta)$ , so erhält man eine kinetische Formulierung, in der die Verteilung  $M$  eine zusätzliche  $x$ -Abhängigkeit aufweist. Stationäre Lösungen  $(h, hu)$  der SH-Gleichungen werden dann nicht mehr allein aus räumlich homogenen Verteilungen  $M$  hervorgehen. Vielmehr kann man sich Teilchendichten  $M$  vorstellen, deren  $x$ -Abhängigkeit allein aus der Größe  $\beta(x)$  hervorgeht, also  $M(h(t), \xi - u(t), \beta(x))$ . Der Zusammenhang, dass makroskopische Gleichgewichtslösungen aus räumlich homogenen mikroskopischen Dichten hervorgehen und gleichzeitig räumlich homogene Dichten zu Gleichgewichtslösungen führen, wie bei den Eulergleichungen und den Maxwellverteilungen, ist dann nicht mehr gegeben. Deswegen ist es sinnvoll, sich zunächst nur auf den Fall konstanter Neigungswinkel  $\zeta$  und damit konstanter Funktionen  $\beta$  zu beschränken.

Darüber hinaus sei angemerkt, dass die allgemeinen SH-Gleichungen in der Form (2.25) wegen der  $x$ -Abhängigkeit im Fluss nicht in Erhaltungform gegeben sind. In diesem Fall kann man das System jedoch so transformieren, dass keine explizite  $x$ -Abhängigkeit mehr auf der linken Seite des Gleichungssystems steht (siehe [1]). Es ist also möglich, die  $x$ -Abhängigkeit aus den Flüssen in die rechte Seite zu „schieben“ und die Gleichungen so wieder auf die Form

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = S(x, u)$$

für eine Größe  $u$ , eine Flussfunktion  $F(u)$  und einen Quellterm  $S(x, u)$  zu bringen. Auf diese Transformation wird in Abschnitt 3.3 näher eingegangen.

Ab hier gelte also die Einschränkung  $\beta = \text{const}$  und damit

$$M(h, \xi - u) = \sqrt{h} \chi\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{h}}\right), \quad (3.12)$$

obwohl man den folgenden Satz ohne Probleme auch für  $M(h, \xi - u, \beta)$  formulieren könnte. Es gilt

**Satz 1** *Das Paar  $(h, hu)$  ist genau dann Lösung der Gleichungen (2.22), wenn  $M(h, \xi - u)$  von der Gestalt (3.10) die kinetische Gleichung*

$$\partial_t M(h, \xi - u) + \xi \partial_x M(h, \xi - u) + g(u) \partial_\xi M(h, \xi - u) =: Q(t, x, \xi) \quad (3.13)$$

löst, wobei  $Q(t, x, \xi)$

$$\int_{\mathbb{R}} Q \, d\xi = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \xi Q \, d\xi = 0 \quad (3.14)$$

erfüllt.

**Beweis.** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $(h, hu)$  Lösung von (2.22) und  $M$  von der Form (3.12), dann gilt trivialerweise (3.13), da es sich in diesem Fall um eine Definition des Operators  $Q$  handelt. Man sieht leicht, dass dieses  $Q$  dann auch (3.14) erfüllt. Dazu bildet man das nullte und das erste Moment der linken Seite von (3.13) und vertauscht Integration und Differentiation in den ersten beiden Termen. Da für  $M$  die Beziehungen (3.9) gelten und da  $(h, hu)$  Lösung der Gleichung (2.22) ist, erhält man für das nullte Moment

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} Q(t, x, \xi) \, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t M(h, \xi - u) + \xi \partial_x M(h, \xi - u) + g(x, u) \partial_\xi M(h, \xi - u) \, d\xi \\ &= \partial_t \int_{\mathbb{R}} M(h, \xi - u) \, d\xi + \partial_x \int_{\mathbb{R}} \xi M(h, \xi - u) \, d\xi \\ &\quad + g(u) \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi M(h, \xi - u) \, d\xi \\ &= \partial_t h + \partial_x(hu) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass  $\chi$  einen kompakten Träger besitzt. Für das erste Moment geht man genauso vor und erhält

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \xi Q(t, x, \xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \xi \partial_t M(h, \xi - u) + \xi^2 \partial_x M(h, \xi - u) + g(u) \xi \partial_\xi M(h, \xi - u) d\xi \\
&= \partial_t \int_{\mathbb{R}} \xi M(h, \xi - u) d\xi + \partial_x \int_{\mathbb{R}} \xi^2 M(h, \xi - u) d\xi \\
&\quad + g(u) \int_{\mathbb{R}} \xi \partial_\xi M(h, \xi - u) d\xi \\
&= \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}\beta h^2) - \int_{\mathbb{R}} M(h, \xi - u) d\xi \\
&= \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}\beta h^2) - g(u)h \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei nun  $M$  von der Form (3.12) und  $(h, hu)$  so, dass  $M(h, \xi - u)$  die Gleichung (3.13) löst für ein  $Q$ , das (3.14) erfüllt. Dann folgt durch das Bilden der ersten beiden Momente der Gleichung (3.13) bezüglich  $\xi$  wegen der Beziehung (3.9) nach der obigen Rechnung, dass  $(h, hu)$  die Gleichungen (2.22) erfüllt.

□

Oft wird statt der Gleichung (3.13) der Grenzwert für  $\varepsilon \rightarrow 0$  des Relaxationsmodells

$$\partial_t f_\varepsilon(t, x, \xi) + \xi \partial_x f_\varepsilon(t, x, \xi) + g(u_\varepsilon) \partial_\xi f_\varepsilon(t, x, \xi) + \frac{1}{\varepsilon} [f_\varepsilon(t, x, \xi) - M(h_\varepsilon, \xi - u_\varepsilon)] = 0 ,$$

$$h_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t, x, \xi) d\xi , \quad (hu)_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}} \xi f_\varepsilon(t, x, \xi) d\xi$$

betrachtet (siehe [11] oder [16] für die Flachwassergleichungen). Dabei geht man davon aus, dass  $f_\varepsilon$  stetig in  $\varepsilon = 0$  ist, also insbesondere der Grenzwert

$$Q := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [M(h_\varepsilon, \xi - u_\varepsilon) - f_\varepsilon]$$

existiert. Die Eigenschaften (3.14) folgen dann unmittelbar aus der obigen Definition der Größen  $h_\varepsilon$  und  $(hu)_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} Q d\xi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} [M(h_\varepsilon, \xi - u_\varepsilon) - f_\varepsilon(t, x, \xi)] d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [h_\varepsilon - h_\varepsilon] \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Auf demselben Weg erhält man  $\int_{\mathbb{R}} \xi Q d\xi = 0$ . Im Allgemeinen scheint es für diese Annahme jedoch noch keinen rigorosen Beweis zu geben (siehe [11]).

**Bemerkung 1** *Mit Gleichung (3.13) hat man eine wesentlich einfachere Beschreibung der SH-Gleichungen (2.22) gefunden. Man beachte, dass die Nichtlinearität der Gleichung (3.13) allein durch den Kollisionsoperator  $Q$  hervorgerufen wird.*

Analog zu dem Vorgehen in [12] für die Flachwassergleichungen versucht man nun, die Funktion  $\chi$ , und damit die Verteilung  $M$ , so festzulegen, dass die stationären Lösungen der Gleichungen (2.22) erhalten bleiben. Die Flachwassergleichungen beschreiben jedoch, im Gegensatz zu den SH-Gleichungen, Strömungen von Fluiden oder Gasen über einer Bodentopographie  $Z(x)$ . Insbesondere wird in diesem Modell die Reibung vernachlässigt. Deswegen waren die Autoren in [12] lediglich an dem Erhalt eines „ruhenden Sees“, d.h. an stationären Lösungen mit  $h(x) + Z(x) = \text{const}$  und  $u(x) = 0$  interessiert. Alle anderen durch den Quellterm hervorgerufenen stationären Lösungen sind physikalisch nicht sinnvoll und werden deshalb nicht weiter betrachtet.

Bei den SH-Gleichungen kann man sich bei der Bestimmung von  $\chi$  nicht auf den Erhalt einer einzelnen, physikalisch sinnvollen Lösung stützen, weil es unendlich viele Gleichgewichtslösungen gibt, die es zu erhalten gilt. Man stelle sich dazu eine ruhende Schneemasse an einem Berghang vor. Das Höhenprofil dieser Masse ist sicherlich nicht eindeutig festgelegt, vielmehr muss lediglich die Steigung des Profils auf eine bestimmte Weise beschränkt sein, um das Anrutschen zu verhindern. Dieser Sachverhalt soll als nächstes geklärt werden.

Zunächst stellt man fest, dass für  $\partial_t h = 0$  und  $u = 0$  durch Einsetzen in die Gleichungen (2.22) die Gleichgewichtsbeziehung

$$\beta \partial_x h = g \tag{3.15}$$

zwischen der Höhe  $h$  und der Funktion  $g$  aus dem Quellterm gilt. Man beachte, dass  $g$  wie in Kapitel 2 beschrieben für  $u = 0$  nicht definiert ist. Man kann sich aber zumindest leicht einen zulässigen Wertebereich für  $g$  überlegen:  $g$  besteht zum einen aus einer durch die geneigten Koordinaten auftretenden Hangabtriebskraft und zum anderen aus einem Term, der durch die Coulomb-Reibung verursacht wird. Der erste Term wird durch

$$g_1 := \sin \zeta ,$$

der zweite durch

$$g_2 := -\frac{u}{|u|} \cos \zeta \tan \delta$$

beschrieben.

Das Coulombsche Reibungsmodell setzt weiter voraus, dass der Term  $g_2$  auch für  $u = 0$  echt zwischen den Grenzen  $-\cos \zeta \tan \delta$  und  $\cos \zeta \tan \delta$  liegen muss. Die Haftreibung ist betragsmäßig also höchstens so groß wie die Gleitreibung.

Für  $\partial_t h = 0$  und  $u = 0$  erhält man

$$\begin{aligned} \partial_t M(h, \xi) &= \partial_t \left[ \sqrt{h} \chi \left( \frac{\xi}{\sqrt{h}} \right) \right] = 0, \\ \partial_x M(h, \xi) &= \partial_x \left[ \sqrt{h} \chi \left( \frac{\xi}{\sqrt{h}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial_x h \left[ \frac{1}{\sqrt{h}} \chi \left( \frac{\xi}{\sqrt{h}} \right) - \frac{\xi}{h} \chi' \left( \frac{\xi}{\sqrt{h}} \right) \right] \end{aligned}$$

und

$$\partial_\xi M(h, \xi) = \chi' \left( \frac{\xi}{\sqrt{h}} \right).$$

Außerdem fordert man, dass im Gleichgewicht der Kollisionsoperator  $Q$  verschwindet. Diese Forderung erscheint durchaus sinnvoll im Vergleich mit den Maxwellverteilungen: für Maxwellverteilungen verschwindet der Kollisionsoperator  $Q$  aus der Boltzmann-Gleichung überall. Dies gilt insbesondere für räumlich homogene Maxwellverteilungen, die durch Integration auf stationäre Lösungen der Eulergleichungen führen. Hier wurde jedoch durch (3.14) bisher lediglich die Bedingung gestellt, dass die ersten beiden Momente von  $Q$  verschwinden.

Damit lautet Gleichung (3.13) für Gleichgewichtslösungen der Form  $\partial_t h = 0$  und  $u = 0$

$$\xi \partial_x M(h, \xi) + g \partial_\xi M(h, \xi) = 0. \quad (3.16)$$

Diese lässt sich nun mittels der Substitution  $\omega = \xi/\sqrt{h}$  äquivalent umformen in

$$\begin{aligned} \frac{\partial_x h}{2} \left[ \frac{\xi}{\sqrt{h}} \chi \left( \frac{\xi}{\sqrt{h}} \right) - \frac{\xi^2}{h} \chi' \left( \frac{\xi}{\sqrt{h}} \right) + g \frac{2}{\partial_x h} \chi' \left( \frac{\xi}{\sqrt{h}} \right) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial_x h}{2} \left[ \omega \chi(\omega) - \omega^2 \chi'(\omega) + 2\beta \chi'(\omega) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[ \omega \chi(\omega) + (2\beta - \omega^2) \chi'(\omega) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Gleichung (3.17) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\chi$ , die unter den Bedingungen (3.11) die eindeutige Lösung

$$\chi(\omega) = C \sqrt{(2\beta - \omega^2)_+} \quad \text{mit} \quad C = \frac{1}{\pi\beta} \quad \text{besitzt .} \quad (3.18)$$

Damit ist schließlich für konstante Neigungswinkel  $\zeta$  die mikroskopische Gleichgewichtsverteilung durch

$$\begin{aligned} M(h, \xi - u) &= \sqrt{h} \chi\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{h}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2h}}{\pi\sqrt{\beta}} \sqrt{\left(1 - \frac{(\xi - u)^2}{2\beta h}\right)_+} \end{aligned} \quad (3.19)$$

gegeben. Dies ist natürlich dasselbe Ergebnis wie in [12] für die Flachwassergleichungen. Im nächsten Kapitel wird sich jedoch zeigen, dass das Ergebnis noch nicht ausreicht, um die gewünschten Gleichgewichtslösungen in jedem Fall zu erhalten. Die Art der Diskretisierungen der kinetischen Gleichung und insbesondere die des Quellterms sind hierbei von entscheidender Bedeutung. Mit Ausnahme des nächsten Abschnitts bezeichnet  $M$  im Folgenden immer eine Gleichgewichtsverteilung der speziellen Gestalt (3.19).

### 3.3 Die transformierten SH-Gleichungen

Im obigen Abschnitt wurde eine kinetische Formulierung für die SH-Gleichungen (2.22) mit konstantem Neigungswinkel  $\zeta$  angegeben. Die allgemeinen SH-Gleichungen (2.25) mit einem ortsabhängigen Neigungswinkel  $\zeta = \zeta(x)$  wurden bisher noch nicht betrachtet. Um eine (semi-)kinetische Formulierung mit einer möglichst einfachen Funktion  $\chi$  für die allgemeinen SH-Gleichungen angeben zu können, kann man das System (2.25) so transformieren, dass die  $x$ -Abhängigkeit nicht länger im Fluss, sondern nur noch auf der rechten Seite steht (siehe [1]). Dazu multipliziert man die Gleichungen (2.25)

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0 , \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \beta \frac{h^2}{2}) &= gh , \end{aligned}$$

mit  $\beta$  und addiert auf beiden Seiten der Massengleichung den Term

$$\beta'(hu)$$

sowie den Term

$$\beta' \left( hu^2 + \frac{1}{2} \beta h^2 \right)$$

auf beiden Seiten der Momentengleichung. Definiert man sich nun

$$\rho := \beta h$$

und

$$m := \beta hu$$

als neue Unbekannte und setzt man voraus, dass  $\beta$  differenzierbar ist und  $\gamma := \beta' / \beta$  existiert, so erhält man schließlich das System partieller Differentialgleichungen

$$\partial_t v + \partial_x F(v) = G(v, x) , \quad (3.20)$$

mit

$$v = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} ,$$

$$F(v) = \begin{pmatrix} m \\ m^2/\rho + \rho^2/2 \end{pmatrix}$$

und

$$G(v, x) = \begin{pmatrix} \gamma m \\ \gamma (m^2/\rho + \rho^2/2) + \rho g \end{pmatrix} .$$

Man sucht nun analog zu oben eine Verteilung  $M(\rho, \xi - m/\rho) = \sqrt{\rho} \chi(\frac{\xi - m/\rho}{\sqrt{\rho}})$ , für die wieder die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix} M(\rho, \xi - m/\rho) d\xi = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ m^2/\rho + \rho^2/2 \end{pmatrix} \quad \text{gilt.} \quad (3.21)$$

Fordert man für  $\chi$  nun

$$\chi(\omega) = \chi(-\omega) ,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(\omega) d\omega = 1 , \quad (3.22)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \omega^2 \chi(\omega) d\omega = \frac{1}{2} ,$$

so kann man auf demselben Weg wie oben leicht nachrechnen, dass (3.21) immer erfüllt ist. Für die neuen Variablen  $\rho$  und  $m$  gilt damit der folgende Satz.

**Satz 2** Das Paar  $(\rho, m)$  ist genau dann Lösung von (3.20), wenn  $M(\rho, \xi - m/\rho)$  die kinetische Gleichung

$$\partial_t M + \xi \partial_x M + \left[ \frac{\gamma}{2} \left( \xi^2 - \left( \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho}{2} \right) \right) + g \right] \partial_\xi M = Q \quad (3.23)$$

löst mit

$$\int_{\mathbb{R}} Q \, d\xi = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \xi Q \, d\xi = 0 .$$

**Beweis.** Die Gleichungen (3.13) und (3.23) unterscheiden sich lediglich in dem Koeffizienten vor  $\partial_\xi M$ . Für diesen Kraftterm

$$F(x, \xi, t) = \frac{\gamma}{2} \left( \xi^2 - \left( \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho}{2} \right) \right) + g$$

muss die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} F(x, \xi, t) \partial_\xi M(\rho, \xi - m/\rho) \, d\xi = - \begin{pmatrix} \gamma m \\ \gamma(m^2/\rho + \rho^2/2) + \rho g \end{pmatrix}$$

gelten.

Tatsächlich ist wegen des kompakten Trägers von  $M$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F \partial_\xi M \, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\gamma}{2} \left( \xi^2 - \left( \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho}{2} \right) \right) + g \right] \partial_\xi M \, d\xi \\ &= \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \partial_\xi M \, d\xi + \left( g - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho}{2} \right) \right) \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi M \, d\xi \\ &= -\frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}} 2 \xi M \, d\xi \\ &= -\gamma m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \xi F \partial_\xi M \, d\xi &= \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}} \xi^3 \partial_\xi M \, d\xi + \left[ g - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho}{2} \right) \right] \int_{\mathbb{R}} \xi \partial_\xi M \, d\xi \\ &= -\frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}} 3 \xi^2 M \, d\xi + \left[ \frac{\gamma}{2} \left( \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho}{2} \right) - g \right] \int_{\mathbb{R}} M \, d\xi \\ &= -\frac{3}{2} \gamma \left( \frac{m^2}{\rho} + \frac{\rho^2}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho}{2} \right) \rho - \rho g \\ &= -\gamma \left( \frac{m^2}{\rho} + \frac{\rho^2}{2} \right) - \rho g . \end{aligned}$$

□



---

Für die kinetische Gleichung (3.23) ist es leider nicht so einfach, eine Gleichgewichtsverteilung  $M$  analog zu dem obigen Vorgehen zu bestimmen. In Gleichung (3.17) konnte man die störenden makroskopischen Größen ausklammern und so sehr leicht eine Funktion  $\chi(\omega)$  bestimmen. Dieses Vorgehen ist hier leider nicht möglich. Deshalb basiert das im folgenden Kapitel vorgestellte numerische Verfahren allein auf den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2 für konstante Neigungswinkel  $\zeta$ . Ideen für die numerische Behandlung allgemeinerer Bodentopographien finden sich in Kapitel 6.



# Kapitel 4

## Ein balanciertes Verfahren in 1D

In diesem Kapitel wird ausgehend von der kinetischen Formulierung der SH-Gleichungen ein Finite-Volumen-Verfahren vorgestellt, das die Gleichgewichtslösungen einer ruhenden granularen Masse sowie die Nichtnegativität der Höhe dieser Masse erhält, zumindest in den Bereichen, in denen sich die Masse stark bewegt.

Die Vorgehensweise zur Konstruktion dieses Verfahrens ist wie folgt: im ersten Abschnitt wird ein eindimensionales mikroskopisches Finite-Volumen-Verfahren für die oben hergeleitete kinetische Formulierung der SH-Gleichungen angegeben. Danach erfolgt der Übergang zu einem ersten makroskopischen konservativen und Fluss-konsistenten Finite-Volumen-Verfahren in einer Dimension (Verfahren 1), für das ein Stabilitätsresultat für die erste Komponente gezeigt werden kann. Es stellt sich jedoch heraus, dass dieses Verfahren nicht in der Lage ist, die in Abschnitt 3.2 angesprochenen Gleichgewichtslösungen zu erhalten. Durch leichte Modifikationen im mikroskopischen Verfahren und in der Diskretisierung des Quellterms kann man aber ein makroskopisches konservatives und konsistentes Verfahren erhalten, das die gewünschte Eigenschaft besitzt (Verfahren 2). Anschließend wird dieses Verfahren durch zwei weitere Änderungen sukzessive verbessert (Verfahren 3 und 4). Leider wird man den oben erwähnten Stabilitätssatz für die erste Komponente nicht mehr auf demselben Weg wie vorher zeigen können, obwohl die numerischen Ergebnisse aus Kapitel 5 stark vermuten lassen, dass er weiterhin gilt. Darüber hinaus verursacht Verfahren 4 bei stark unzulässigen Höhenprofilen, wie z.B. bei Riemannproblemen, Oszillationen, die zwar stabil zu bleiben scheinen, jedoch zeitlich auch nicht abklingen. Aus diesem Grunde wird letztendlich eine Kombination aus Verfahren 1 und 4 benutzt, letzteres zum Anrutschen und Anhalten sowie das erste für den Zeitraum dazwischen, der, in dem sich die Masse stark bewegt. Auf diese Weise hat man eine numerische Methode zur Lösung der SH-Gleichungen konstruiert, die die gewünschten Eigenschaften besitzt.

## 4.1 Ein erstes mikroskopisches Verfahren

Die kinetische Formulierung der SH-Gleichungen lautete (vgl. 3.13)

$$M_t + \xi M_x + g(u) M_\xi = Q , \quad (4.1)$$

welche nun diskretisiert werden soll. Dazu wird der Raum  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  mit einem äquidistanten Gitter mit Gitterpunkten  $(x_i, t_n) = (i\Delta x, n\Delta t)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , überzogen. Eine Zelle  $C_i$  (das Kontrollvolumen) ist dann definiert als  $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  mit  $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$ , ihre Länge ist  $\Delta x$ . Die Größen  $\Delta x$  und  $\Delta t$  bezeichnet man als Ort- bzw. Zeitschrittweite. An jedem dieser Gitterpunkte  $(x_i, t_n)$  sollen approximative Werte  $(h_i^n, q_i^n = (hu)_i^n)$  für die exakte Lösung  $(h(x_i, t_n), q(x_i, t_n) = (hu)(x_i, t_n))$  berechnet werden. Die diskreten Größen  $(h_i^n, q_i^n)$  sind dabei als Zellmittelwerte über die Zellen  $C_i$  zu verstehen, d.h.

$$\begin{aligned} h_i^n &= \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} h(x, t_n) dx , \\ q_i^n &= \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Weiter sei

$$u_i^n = \frac{q_i^n}{h_i^n}$$

sowie

$$U_i^n = \begin{pmatrix} h_i^n \\ q_i^n \end{pmatrix} .$$

Mit (4.2) sei nun die Partikeldichte  $M_i^n(\xi)$  durch

$$M_i^n(\xi) = M(h_i^n, \xi - u_i^n)$$

gegeben.

Die Gleichung (4.1) diskretisiert man nun direkt in der Teilchendichte, wobei der Kollisionsoperator erst einmal vernachlässigt wird bzw. sein Beitrag in der Größe  $f_i^{n+1}(\xi)$  statt auf der rechten Seite zu finden ist. Man erhält das mikroskopische Verfahren

$$f_i^{n+1}(\xi) - M_i^n(\xi) + \lambda \xi (M_{i+1/2}^n(\xi) - M_{i-1/2}^n(\xi)) + \Delta t g_i^n (M_\xi)_i^n(\xi) = 0 \quad (4.3)$$

mit  $\lambda = \Delta t / \Delta x$  und den mikroskopischen Flüssen  $M_{i+1/2}^n$  gemäß der Upwind-Formel

$$M_{i+1/2}^n = \begin{cases} M_i^n(\xi) & \text{für } \xi \geq 0, \\ M_{i+1}^n(\xi) & \text{für } \xi < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Nähere Informationen zum Upwind-Verfahren finden sich z.B. in [6] und [7].

Durch die Vernachlässigung des Kollisionsoperators  $Q$  in Gleichung (4.3) wird die Klasse der Gleichgewichtsverteilungen, d.h. die Menge der Verteilungen  $M$  mit der Eigenschaft (3.9), in jedem Schritt erst einmal verlassen. Die aus den Daten zur Zeitschicht  $n$  berechnete Teilchendichte zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  erfüllt also nicht notwendig die Bedingungen (3.9) und wird deshalb mit  $f_i^{n+1}$  statt mit  $M_i^{n+1}$  bezeichnet. Später wird  $f_i^{n+1}$  aber mittels

$$U_i^{n+1} := \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} f_i^{n+1}(\xi) d\xi \quad (4.5)$$

auf die Klasse der Gleichgewichtsverteilungen zurückprojiziert. Dieses Vorgehen ist für kinetische Verfahren durchaus üblich (siehe [11] und [12]).

Die mikroskopische Größe  $M_i^{n+1}(\xi)$  berechnet sich also aus den Daten zur Zeitschicht  $n$  wie folgt:

1. man erhält  $f_i^{n+1}(\xi)$  aus Gleichung (4.3),
2. anschließend wird mittels (4.5) die makroskopische Größe  $U_i^{n+1} = (h_i^{n+1}, q_i^{n+1})^T$  berechnet,
3. das daraus gewonnene  $M_i^{n+1}(\xi) = M(h_i^{n+1}, \xi - u_i^{n+1})$  besitzt dann wieder die Eigenschaften (3.9).

Der Quellterm soll zunächst durch  $g_i^n = g(u_i^n)$  für  $u_i^n \neq 0$  diskretisiert werden. Im Fall  $u = 0$  ist, wie schon in Kapitel 3 erwähnt, die Funktion  $g(u)$  nicht eindeutig definiert, es gilt aber die Beziehung  $\beta \partial_x h = g$ . Daher soll für  $u_i^n = 0$  der Quellterm gemäß

$$g_i^n = \beta \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \quad (4.6)$$

diskretisiert werden. Zusätzlich weiß man, dass die im Gleichgewicht auftretende Haftreibung durch die Gleitreibung beschränkt ist (siehe Kapitel 3). Wie schon in der Einleitung angegeben, soll nun der Begriff eines zulässigen Höhenprofils genauer definiert werden.

**Definition 1 (zulässiges Profil)** Ein Höhenprofil  $h$  heißt zulässig, wenn für seine Ableitung  $\partial_x h$  die Beziehung

$$\min [\sin \zeta + R, \max (\beta \partial_x h, \sin \zeta - R)] = \beta \partial_x h$$

gilt, wobei  $\pm R$  mit

$$R = \cos \zeta \tan \delta$$

den aus der Reibung resultierenden Anteil des Quellterms bezeichnet.

Ersetzt man nun in dieser Definition  $\partial_x h$  durch eine zentrale Differenz wie in (4.6), so erhält man analog zu Definition 1 die diskrete Bedingung für zulässige Höhenprofile:

$$\min [\sin \zeta + R, \max (\beta ((h_{i+1}^n - h_{i-1}^n)/2\Delta x), \sin \zeta - R)] = \beta ((h_{i+1}^n - h_{i-1}^n)/2\Delta x) .$$

Ist diese Bedingung im Fall  $u_i^n = 0$  verletzt, so ist das Profil kein Gleichgewichtsprofil. In diesem Fall soll  $g_i^n$  auf eine der beiden Schranken gesetzt werden. Man hat also insgesamt für den Term  $g_i^n$

$$g_i^n = \begin{cases} \tilde{g}_i^n & \text{für } u_i^n = 0 \\ g(u_i^n) & \text{sonst .} \end{cases}$$

mit

$$\tilde{g}_i^n = \min [\sin \zeta + R, \max (\beta ((h_{i+1}^n - h_{i-1}^n)/2\Delta x), \sin \zeta - R)] .$$

Statt (4.3) kann man auch das mikroskopische Verfahren

$$f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g_i^n) - M_i^n(\xi) + \lambda \xi (M_{i+1/2}^n(\xi) - M_{i-1/2}^n(\xi)) = 0 \quad (4.7)$$

betrachten. Dieses soll den Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen bilden.

## 4.2 Ein erstes makroskopisches Verfahren

In diesem Abschnitt wird aus dem oben vorgestellten mikroskopischen Verfahren ein erstes makroskopisches Verfahren entwickelt.

Bildet man das nullte und erste Moment in  $\xi$  der Gleichung (4.7), so erhält man wegen

$$\int_{\mathbb{R}} \xi f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g_i^n) d\xi = \int_{\mathbb{R}} (\xi - \Delta t g_i^n) f_i^{n+1}(\xi) d\xi = (hu)_i^{n+1} - \Delta t g_i^n h_i^{n+1}$$

und den Überlegungen des vorherigen Abschnitts das makroskopische Verfahren

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) + \Delta t S_i^n$$

mit  $S_i^n = \begin{pmatrix} 0 \\ g_i^n h_i^{n+1} \end{pmatrix}$ . (4.8)

Dabei sind die makroskopischen Flüsse entsprechend den Upwind-Formeln für die mikroskopischen Flüsse gegeben durch

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^n &= F(U_i^n, U_{i+1}^n) \\ &= \int_{\xi \geq 0} \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} M_i^n(\xi) d\xi + \int_{\xi < 0} \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} M_{i+1}^n(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

Anschaulich bedeutet dieses Vorgehen, wie schon oben erwähnt, dass man bei der Berechnung von  $U_i^{n+1}$  aus den Daten der Zeitschicht  $n$  die Klasse der Gleichgewichtsverteilungen  $M$  mit den Eigenschaften (3.9) zunächst verlässt, anschließend aber das berechnete  $f_i^{n+1}$  mittels

$$U_i^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} f_i^{n+1}(\xi) d\xi$$

zurückprojiziert.

Nun sollen die numerischen Flüsse des makroskopischen Verfahrens berechnet werden. Für die erste Komponente von  $F_{i+1/2}^n$  erhält man

$$\begin{aligned} (F_{i+1/2}^n)^1 &= \int_{\xi \geq 0} \xi M_i^n(\xi) d\xi + \int_{\xi < 0} \xi M_{i+1}^n(\xi) d\xi \\ &= \underbrace{\int_{\xi \geq 0} \xi M(h_i^n, \xi - u_i^n) d\xi}_{I_1} + \underbrace{\int_{\xi < 0} \xi M(h_{i+1}^n, \xi - u_{i+1}^n) d\xi}_{I_2} . \end{aligned}$$

Setzt man nun in die Integrale  $I_1$  und  $I_2$  die spezielle Gestalt von  $\chi$  nach (3.18) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\xi \geq 0} \xi \sqrt{h_i^n} \chi\left(\frac{\xi - u_i^n}{\sqrt{h_i^n}}\right) d\xi \\ &= \sqrt{h_i^n} \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\beta}} \int_{\xi \geq 0} \xi \left(1 - \left(\frac{\xi - u_i^n}{\sqrt{2\beta h_i^n}}\right)_+^2\right)^{1/2} d\xi . \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\sin x := ((\xi - u_i^n)/\sqrt{2\beta h_i^n})$$

und einer Fallunterscheidung in

$$a_1 := -u_i^n/\sqrt{2\beta h_i^n}$$

erhält man dann

für  $a_1 \leq -1$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\pi} h_i^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(x) \sqrt{2\beta h_i^n} + u_i^n) \cos^2(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{2\beta} (h_i^n)^{3/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) \cos^2(x) dx + \frac{2}{\pi} (hu)_i^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{2\beta} (h_i^n)^{3/2} \left[ \frac{1}{3} \cos^3(x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2}{\pi} (hu)_i^n \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= (hu)_i^n, \end{aligned}$$

für  $-1 < a_1 < 1$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\pi} h_i^n \int_{\arcsin(a_1)}^{\pi/2} (\sin(x) \sqrt{2\beta h_i^n} + u_i^n) \cos^2(x) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{2\beta} (h_i^n)^{3/2} \left[ \frac{1}{3} \cos^3(x) \right]_{\arcsin(a_1)}^{\pi/2} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} (hu)_i^n \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{\arcsin(a_1)}^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{3\pi} \sqrt{2\beta} (h_i^n)^{3/2} \cos^3(\arcsin(a_1)) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} (hu)_i^n \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin(a_1) - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(a_1)) \right), \end{aligned}$$

für  $a_1 \geq 1$ :

$$I_1 = 0.$$

Das Ergebnis  $I_1 = (hu)_i^n$  im ersten Fall ist nicht weiter verwunderlich, denn für  $a_1 \leq -1$  ist  $u_i^n \geq \sqrt{2\beta h_i^n}$  und damit  $\xi = \sin(x) \sqrt{2\beta h_i^n} + u_i^n \geq 0$ . Für  $I_1$  ergibt sich dann

$$I_1 = \int_{\xi \geq 0} \xi M_i^n(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi M_i^n(\xi) d\xi = (hu)_i^n.$$

Die Information über die mikroskopische Geschwindigkeit geht in diesem Fall also verloren, und man hätte genauso gut ein Upwind-Verfahren in den makroskopischen Größen verwenden können.



Auf dem gleichen Weg wie oben bekommt man für den zweiten Teil von  $(F_{i+1/2}^n)^1$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\xi < 0} \xi \sqrt{h_{i+1}^n} \chi\left(\frac{\xi - u_{i+1}^n}{\sqrt{h_{i+1}^n}}\right) d\xi \\ &= \sqrt{h_{i+1}^n} \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\beta}} \int_{\xi < 0} \xi \left(1 - \left(\frac{\xi - u_{i+1}^n}{\sqrt{2\beta h_{i+1}^n}}\right)^2\right)_+^{1/2} d\xi . \end{aligned}$$

Und die entsprechende Fallunterscheidung für  $a_2 := -u_{i+1}^n/\sqrt{2\beta h_{i+1}^n}$  liefert

für  $a_2 \leq -1$ :  $I_2 = 0$  ,

für  $-1 < a_2 < 1$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{\pi} h_{i+1}^n \int_{-\pi/2}^{\arcsin(a_2)} \left( \sin(x) \sqrt{2\beta h_{i+1}^n + u_{i+1}^n} \right) \cos^2(x) dx , \\ &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{2\beta} (h_{i+1}^n)^{3/2} \left[ \frac{1}{3} \cos^3(x) \right]_{-\pi/2}^{\arcsin(a_2)} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} (hu)_{i+1}^n \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{-\pi/2}^{\arcsin(a_2)} \\ &= -\frac{2}{3\pi} \sqrt{2\beta} (h_{i+1}^n)^{3/2} \cos^3(\arcsin(a_2)) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} (hu)_{i+1}^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(a_2) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(a_2)) \right) , \end{aligned}$$

für  $a_2 \geq 1$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{\pi} h_{i+1}^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \sin(x) \sqrt{2\beta h_{i+1}^n + u_{i+1}^n} \right) \cos^2(x) dx \\ &= (hu)_{i+1}^n . \end{aligned}$$

Die zweite Komponente berechnet man analog zu

$$\begin{aligned} (F_{i+1/2}^n)^2 &= \int_{\xi \geq 0} \xi^2 M_i^n(\xi) d\xi + \int_{\xi < 0} \xi^2 M_{i+1}^n(\xi) d\xi \\ &= \underbrace{\int_{\xi \geq 0} \xi^2 M(h_i^n, \xi - u_i^n) d\xi}_{I_3} + \underbrace{\int_{\xi < 0} \xi^2 M(h_{i+1}^n, \xi - u_{i+1}^n) d\xi}_{I_4} . \end{aligned}$$

Für die beiden Integrale  $I_3$  und  $I_4$  erhält man mit derselben Fallunterscheidung wie oben die folgenden Ergebnisse

$$\begin{aligned} \text{für } a_1 \leq -1: \quad I_3 &= \frac{2}{\pi} h_i^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(x) \sqrt{2\beta h_i^n} + u_i^n)^2 \cos^2(x) dx \\ &= h_i^n (u_i^n)^2 + \frac{1}{2} \beta (h_i^n)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } -1 < a_1 < 1: \quad I_3 &= \frac{2}{\pi} h_i^n \int_{\arcsin(a_1)}^{\pi/2} (\sin(x) \sqrt{2\beta h_i^n} + u_i^n)^2 \cos^2(x) dx \\ &= \frac{4}{\pi} \beta (h_i^n)^2 \left[ \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin(4x) \right]_{\arcsin(a_1)}^{\pi/2} \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \sqrt{2\beta} (hu)_i^n \sqrt{h_i^n} \left[ \frac{1}{3} \cos^3(x) \right]_{\arcsin(a_1)}^{\pi/2} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} h_i^n (u_i^n)^2 \left[ \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{\arcsin(a_1)}^{\pi/2} \\ &= \frac{4}{\pi} \beta (h_i^n)^2 \left( \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \arcsin(a_1) + \frac{1}{32} \sin(a_1) \right) \\ &\quad - \frac{4}{3\pi} \sqrt{2\beta} (hu)_i^n \sqrt{h_i^n} \cos^3(\arcsin(a_1)) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} h_i^n (u_i^n)^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin(a_1) - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(a_1)) \right), \end{aligned}$$

$$\text{für } a_1 \geq 1: \quad I_3 = 0,$$

$$\text{für } a_2 \leq -1: \quad I_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{für } -1 < a_2 < 1: \quad I_4 &= \frac{2}{\pi} h_{i+1}^n \int_{-\pi/2}^{\arcsin(a_2)} (\sin(x) \sqrt{2\beta h_{i+1}^n} + u_{i+1}^n)^2 \cos^2(x) dx, \\ &= \frac{4}{\pi} \beta (h_{i+1}^n)^2 \left[ \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin(4x) \right]_{-\pi/2}^{\arcsin(a_2)} \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \sqrt{2\beta} (hu)_{i+1}^n \sqrt{h_{i+1}^n} \left[ \frac{1}{3} \cos^3(x) \right]_{-\pi/2}^{\arcsin(a_2)} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} h_{i+1}^n (u_{i+1}^n)^2 \left[ \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{-\pi/2}^{\arcsin(a_2)} \\ &= \frac{4}{\pi} \beta (h_{i+1}^n)^2 \left( \frac{1}{8} \arcsin(a_2) + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{32} \sin(4 \arcsin(a_2)) \right) \\ &\quad - \frac{4}{3\pi} \sqrt{2\beta} (hu)_{i+1}^n \sqrt{h_{i+1}^n} \cos^3(\arcsin(a_2)) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} h_{i+1}^n (u_{i+1}^n)^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(a_2) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(a_2)) \right), \end{aligned}$$

für  $a_2 \geq 1$ :

$$I_4 = h_{i+1}^n (u_i^n)^2 + \frac{1}{2} \beta (h_{i+1}^n)^2 .$$

Insgesamt erhält man also:

**Verfahren 1** ist für  $U_i^n = (h_i^n, q_i^n)^T \in \mathbb{R}^2$  gegeben durch (vgl. (4.8))

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) + \Delta t S_i^n$$

mit

$$F_{i+1/2}^n = ((F_{i+1/2}^n)^1, (F_{i+1/2}^n)^2)^T = (I_1 + I_2, I_3 + I_4)^T ,$$

$$S_i^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}_i^n h_i^{n+1} \end{pmatrix} & \text{für } u_i^n = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ g(u_i^n) h_i^{n+1} \end{pmatrix} & \text{sonst ,} \end{cases}$$

$$\tilde{g}_i^n = \min \left[ \sin \zeta + R, \max \left( \beta ((h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) / 2 \Delta x), \sin \zeta - R \right) \right]$$

und

$$R = \cos \zeta \tan \delta .$$

Dieses Verfahren ist offensichtlich konservativ in der Höhe  $h$ , da es sich in der ersten Komponente in Erhaltungsform

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \lambda ((F_{i+1/2}^n)^1 - (F_{i-1/2}^n)^1)$$

schreiben lässt. Weiter ist es konsistent, denn für die numerische Flussfunktion gilt

$$F_{i+1/2}^n = F(U_i^n, U_{i+1}^n)$$

mit

$$F(U, V) = \int_{\xi \geq 0} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \xi M(U_1, \xi - \frac{U_2}{U_1}) d\xi + \int_{\xi < 0} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \xi M(V_1, \xi - \frac{V_2}{V_1}) d\xi ,$$

wobei  $U$  und  $V \in \mathbb{R}^2$  und die Indizes jeweils die erste bzw. zweite Komponente bezeichnen.

Aus dieser Darstellung folgt sofort mit  $U = (h, hu)^T$

$$\begin{aligned} F(U, U) &= \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \xi M(h, \xi - u) d\xi \\ &= \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}\beta h^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In Anlehnung an Satz 3 aus [12] kann man für das Verfahren 1 den folgenden Satz formulieren, der eine Art Stabilität der ersten Komponente sicher stellt.

**Satz 3** *Unter der CFL-Bedingung*

$$\max_{i \in \mathbb{Z}} (|u_i^n| + \sqrt{2\beta h_i^n}) \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad u_i^n \neq 0 \quad (4.9)$$

erhält das Verfahren 1 mit den eben berechneten Flüssen die Höhe  $h$  nichtnegativ, d.h. es gilt  $h_i^n \geq 0 \forall i \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}$ , wenn  $h_i^0 \geq 0 \forall i \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis.** Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für den Induktionsschritt ist folgende Implikation zu zeigen

$$h_i^n \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad \implies \quad h_i^{n+1} \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

Dazu verwendet man die Beziehungen

$$h_i^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} f_i^{n+1}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g(u_i^n)) d\xi$$

und

$$f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g(u_i^n)) = M_i^n(\xi) - \lambda \xi (M_{i+1/2}^n(\xi) - M_{i-1/2}^n(\xi))$$

gemäß (4.7). Die mikroskopischen Flüsse waren dabei durch die Upwind-Formel (4.4) gegeben. Eine Fallunterscheidung in  $\xi \geq 0$  und  $\xi < 0$  liefert also

$$\xi \geq 0 : \quad f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g(u_i^n)) = (1 - \lambda \xi) M_i^n(\xi) + \lambda \xi M_{i-1}^n(\xi),$$

$$\xi < 0 : \quad f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g(u_i^n)) = (1 + \lambda \xi) M_i^n(\xi) - \lambda \xi M_{i+1}^n(\xi).$$

Wegen  $M_i^n(\xi) = \sqrt{h_i^n} \chi\left(\frac{(\xi - u_i^n)}{\sqrt{h_i^n}}\right)$  und der Nichtnegativität von  $\chi$  gilt offensichtlich  $M_i^n(\xi) \geq 0 \forall i \in \mathbb{Z}$ , da  $h_i^n \geq 0 \forall i \in \mathbb{Z}$ . Außerdem hat  $\chi$  einen kompakten Träger: es ist

$$M_i^n(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad |\xi - u_i^n| \geq \sqrt{2\beta h_i^n}.$$

Gilt also  $|\xi - u_i^n| \geq \sqrt{2\beta h_i^n} \forall i \in \mathbb{Z}$ , so ist in beiden Fällen

$$f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g(u_i^n)) \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Für  $|\xi - u_i^n| < \sqrt{2\beta h_i^n}$  erhält man

$$|\xi| \leq |\xi - u_i^n| + |u_i^n| < \sqrt{2\beta h_i^n} + |u_i^n| \leq 1/\lambda,$$

also  $|\lambda\xi| \leq 1$ . Dann ist  $f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g(u_i^n))$  in beiden Fällen eine Konvexkombination aus nichtnegativen Größen, es ist also

$$f_i^{n+1}(\xi + \Delta t g(u_i^n)) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{Z},$$

woraus direkt der Schluss (4.10) und damit die Behauptung folgt. □

Man sieht jedoch leicht, dass das oben vorgestellte Verfahren 1 Gleichgewichtslösungen noch nicht erhält. Betrachtet man nämlich ein zulässiges Höhenprofil  $h$  zur Zeit  $t_n$ , für das die Geschwindigkeit  $u$  überall Null ist, also  $u_i^n = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$ , so gilt für die Werte  $h_i^{n+1}$  und  $(hu)_i^{n+1}$  der nächsten Zeitschicht nach Verfahren 1

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n - \lambda \left[ (F_{i+1/2}^n)^1 - (F_{i-1/2}^n)^1 \right] \\ &= h_i^n - \lambda \left[ \frac{2}{3\pi} \sqrt{2\beta} \left( (h_i^n)^{3/2} - (h_{i+1}^n)^{3/2} \right) - \frac{2}{3\pi} \sqrt{2\beta} \left( (h_{i-1}^n)^{3/2} - (h_i^n)^{3/2} \right) \right] \\ &= h_i^n + \lambda \left[ \frac{2}{3\pi} \sqrt{2\beta} \left( (h_{i+1}^n)^{3/2} - 2(h_i^n)^{3/2} + (h_{i-1}^n)^{3/2} \right) \right] \end{aligned}$$

Da der zweite Term der rechten Seite i.d.R. ungleich Null sein wird, erhält man also  $h_i^{n+1} \neq h_i^n$  für die meisten zulässigen Profile  $h$ . Man beachte, dass die Überprüfung, ob  $h$  ein zulässiges Profil ist, im diskretisierten Quellterm vorgenommen wird, welcher nur Einfluss auf die zweite Komponente nimmt. Wünschenswert wäre ein Verfahren, für das

$$u_i^n = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad \implies \quad h_i^{n+1} = h_i^n \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

gilt und das unzulässige Profile über die Geschwindigkeit ändert. Dies ist hier noch nicht der Fall und erklärt die zunächst recht unsinnig erscheinende Einschränkung  $u_i^n \neq 0$  in Satz 3.

Für das Moment gilt

$$\begin{aligned}
(hu)_i^{n+1} &= (hu)_i^n - \lambda \left[ (F_{i+1/2}^n)^2 - (F_{i-1/2}^n)^2 \right] + \Delta t \tilde{g}_i^n h_i^{n+1} \\
&= (hu)_i^n - \lambda \left[ \frac{\beta}{4} (h_i^n)^2 + \frac{\beta}{4} (h_{i+1}^n)^2 - \frac{\beta}{4} (h_{i-1}^n)^2 - \frac{\beta}{4} (h_i^n)^2 \right] + \Delta t \beta \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) h_i^{n+1} \\
&= (hu)_i^n - \lambda \frac{\beta}{4} \left[ (h_{i+1}^n)^2 - (h_{i-1}^n)^2 \right] + \Delta t \beta \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) h_i^{n+1} \\
&= (hu)_i^n - \Delta t \beta \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \left( \frac{h_{i+1}^n + h_{i-1}^n}{2} \right) + \Delta t \beta \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) h_i^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ersetzt man also  $h_i^{n+1}$  durch die Mittelung  $(h_{i+1}^n + h_{i-1}^n)/2$  zur Zeitschicht  $n$ , so gilt für zulässige Profile  $h$  tatsächlich:

$$u_i^n = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad \implies \quad u_i^{n+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} .$$

Dagegen wird sich die Höhe i.A. ändern.

### 4.3 Die verbesserten Verfahren: Verfahren 2, 3 und 4

Die obigen Ergebnisse führen auf die Idee, die mikroskopischen Flüsse  $M_{i+1/2}^n(\xi)$  so zu ändern, dass sich bei geeigneter Approximation des Quellterms dasselbe Resultat wie vorher bezüglich der Geschwindigkeit ergibt, zusätzlich aber die Höhen der Gleichgewichtsprofile unverändert bleiben, d.h.  $h_i^{n+1} = h_i^n \quad \forall i \in \mathbb{Z}$ , und unzulässige Profile über die Geschwindigkeit geändert werden. Dieses Ziel kann durch die folgende Wahl der mikroskopischen Flüsse erreicht werden

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{i+1/2}^n &= \begin{cases} M\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}, \xi - u_i^n\right) & \text{für } \xi \geq 0 \\ M\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}, \xi - u_{i+1}^n\right) & \text{für } \xi < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sqrt{\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}} \chi\left(\frac{\xi - u_i^n}{\sqrt{(h_i^n + h_{i+1}^n)/2}}\right) & \text{für } \xi \geq 0 \\ \sqrt{\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}} \chi\left(\frac{\xi - u_{i+1}^n}{\sqrt{(h_i^n + h_{i+1}^n)/2}}\right) & \text{für } \xi < 0 . \end{cases} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Das eigentliche Upwinding geschieht also nur noch in  $u$ , für  $h$  wird in jedem Fall die Mittelung  $(h_i^n + h_{i+1}^n)/2$  verwendet.

Die neuen makroskopischen Flüsse  $\tilde{F}_{i+1/2}^n = ((\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1, (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2)^T$  lauten nun

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1 &= \int_{\mathbb{R}} \xi M_{i+1/2}^n(\xi) d\xi \\ &= \underbrace{\int_{\xi \geq 0} \xi \sqrt{\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}} \chi\left(\frac{\xi - u_i^n}{\sqrt{(h_i^n + h_{i+1}^n)/2}}\right) d\xi}_{\tilde{I}_1} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\xi < 0} \xi \sqrt{\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}} \chi\left(\frac{\xi - u_{i+1}^n}{\sqrt{(h_i^n + h_{i+1}^n)/2}}\right) d\xi}_{\tilde{I}_2}. \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $\sin x := ((\xi - u_i^n)/\sqrt{(h_i^n + h_{i+1}^n)\beta})$  erhält man ganz analog zu oben

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \sqrt{\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\beta}} \int_{\xi < 0} \xi \left(1 - \left(\frac{\xi - u_i^n}{\sqrt{(h_i^n + h_{i+1}^n)\beta}}\right)^2\right)_+^{1/2} d\xi \\ &= \frac{(h_i^n + h_{i+1}^n)}{\pi} \int_{\xi < 0} (\sin(x) \sqrt{\beta(h_i^n + h_{i+1}^n) + u_i^n}) \cos^2(x) dx \end{aligned}$$

sowie die Fallunterscheidung in der Größe  $\tilde{a} := -u_i^n/\sqrt{\beta(h_i^n + h_{i+1}^n)}$

$$\underline{\text{für } \tilde{a}_1 \leq -1:} \quad \tilde{I}_1 = \left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right) u_i^n,$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{für } -1 < \tilde{a}_1 < 1:} \quad \tilde{I}_1 &= \frac{2}{3\pi} \sqrt{2\beta} \left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right)^{3/2} \cos^3(\arcsin(a_1)) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right) u_i^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin(a_1) - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(a_1))\right), \end{aligned}$$

$$\underline{\text{für } \tilde{a}_1 \geq 1:} \quad \tilde{I}_1 = 0.$$

Auf demselben Weg erhält man für  $\tilde{I}_2$  und  $\tilde{a}_2 := -u_{i+1}^n/\sqrt{\beta(h_i^n + h_{i+1}^n)}$

$$\underline{\text{für } \tilde{a}_2 \leq -1:} \quad \tilde{I}_2 = 0,$$

$$\text{für } -1 < \tilde{a}_2 < 1: \quad \tilde{I}_2 = -\frac{2}{3\pi}\sqrt{2\beta}\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right)^{3/2} \cos^3(\arcsin(a_2)) \\ + \frac{2}{\pi}\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right) u_{i+1}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(a_2) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(a_2))\right),$$

$$\text{für } \tilde{a}_2 \geq 1: \quad \tilde{I}_2 = \left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right) u_{i+1}^n.$$

Für die zweite Komponente des makroskopischen Flusses hat man

$$(\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 M_{i+1/2}^n(\xi) d\xi \\ = \underbrace{\int_{\xi \geq 0} \xi^2 \sqrt{\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}} \chi\left(\frac{\xi - u_i^n}{\sqrt{(h_i^n + h_{i+1}^n)/2}}\right) d\xi}_{\tilde{I}_3} \\ + \underbrace{\int_{\xi < 0} \xi^2 \sqrt{\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}} \chi\left(\frac{\xi - u_{i+1}^n}{\sqrt{(h_i^n + h_{i+1}^n)/2}}\right) d\xi}_{\tilde{I}_4}$$

und

$$\text{für } \tilde{a}_1 \leq -1: \quad \tilde{I}_3 = \left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right) (u_i^n)^2 + \frac{1}{2}\beta\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right)^2,$$

$$\text{für } -1 < \tilde{a}_1 < 1: \quad \tilde{I}_3 = \frac{4}{\pi}\beta\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \arcsin(a_1) + \frac{1}{32} \sin(4 \arcsin(a_1))\right) \\ + \frac{4}{3\pi}\sqrt{2\beta}\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right)^{3/2} u_i^n \cos^3(\arcsin(a_1)) \\ + \frac{2}{\pi}\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right) (u_i^n)^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin(a_1) - \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(a_1))\right),$$

$$\text{für } \tilde{a}_1 \geq 1: \quad \tilde{I}_3 = 0,$$

$$\text{für } \tilde{a}_2 \leq -1: \quad \tilde{I}_4 = 0,$$

$$\text{für } -1 < \tilde{a}_2 < 1: \quad \tilde{I}_4 = \frac{4}{\pi}\beta\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \arcsin(a_2) - \frac{1}{32} \sin(4 \arcsin(a_2))\right) \\ - \frac{4}{3\pi}\sqrt{2\beta}\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right)^{3/2} u_{i+1}^n \cos^3(\arcsin(a_2)) \\ + \frac{2}{\pi}\left(\frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}\right) (u_{i+1}^n)^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(a_2) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(a_2))\right),$$



$$\text{für } \tilde{a}_2 \geq 1: \quad \tilde{I}_4 = \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right) (u_{i+1}^n)^2 + \frac{1}{2} \beta \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right)^2 .$$

Die modifizierten Flüsse lauten also

$$\tilde{F}_{i+1/2}^n = ((\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1, (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2)^T = (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2, \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4)^T \quad (4.12)$$

mit den oben berechneten  $\tilde{I}_1$  bis  $\tilde{I}_4$ .

Die genaue Diskretisierung des Quellterms  $S_i^n$  für den Fall  $u_i^n = 0$  soll erst durch die folgende Überlegung festgelegt werden. Betrachtet man nämlich ein zulässiges Höhenprofil  $h$  mit Geschwindigkeit Null zur Zeit  $t_n$ , d.h.  $u_i^n = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$ , so soll dieses beim Übergang zur Zeit  $t_{n+1}$  unverändert bleiben, d.h. es soll gelten

$$h_i^{n+1} = h_i^n \quad \text{und} \quad u_i^{n+1} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} .$$

Da für  $u_i^n = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1 &= \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \\ &= \frac{2}{3\pi} \sqrt{2\beta} \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right)^{3/2} - \frac{2}{3\pi} \sqrt{2\beta} \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right)^{3/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt, erhält man

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n - \lambda \left[ (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1 - (\tilde{F}_{i-1/2}^n)^1 \right] \\ &= h_i^n . \end{aligned}$$

Das Profil bleibt also wie gewünscht unverändert. Diese Eigenschaft ist auch physikalisch sinnvoll. Ist die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt identisch Null, so kann sich auch das Höhenprofil nicht verändern. Für Verfahren 1 war dies nicht gegeben.

Nun gilt es, die Diskretisierung des Quellterms für  $u_i^n = 0$  so zu modifizieren, dass weiterhin  $u_i^{n+1} = 0$  gilt für zulässige Profile. Zunächst berechnet sich für  $u_i^n = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$  der modifizierte Momentenfluss zu

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2 &= \frac{4}{\pi} \beta \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right)^2 \left( \frac{\pi}{16} \right) + \frac{4}{\pi} \beta \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right)^2 \left( \frac{\pi}{16} \right) \\ &= \frac{\beta}{2} \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

und schließlich das Moment zu

$$\begin{aligned}
(hu)_i^{n+1} &= (hu)_i^n - \lambda \left[ (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2 - (\tilde{F}_{i-1/2}^n)^2 \right] + \Delta t \tilde{g}_i^n h_i^{n+1} \\
&= (hu)_i^n - \lambda \frac{\beta}{2} \left[ \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right)^2 - \left( \frac{h_{i-1}^n + h_i^n}{2} \right)^2 \right] + \Delta t \tilde{g}_i^n h_i^{n+1} \\
&= (hu)_i^n - \Delta t \beta \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \left( \frac{h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n}{4} \right) + \Delta t \tilde{g}_i^n h_i^{n+1} .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Approximiert man also die Größen  $(\partial_x h)(x_i, t_n)$  und  $h_i^{n+1}$  aus dem Quellterm mittels

$$\begin{aligned}
(\partial_x h)(x_i, t_n) &\approx \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \\
h_i^{n+1} &\approx \left( \frac{h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n}{4} \right) ,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

so erhält man für zulässige Höhenprofile  $(hu)_i^{n+1} = (hu)_i^n \forall i \in \mathbb{Z}$ , also  $u_i^{n+1} = u_i^n \forall i \in \mathbb{Z}$ . Man beachte, dass für  $u_i^n = 0$  die Höhe  $h_i^n$  zumindest im nächsten Schritt unverändert bleibt, also  $h_i^{n+1} = h_i^n$  gilt, und deshalb obige Approximation für  $h_i^{n+1}$  sinnvoll ist.

**Verfahren 2** ist für  $U_i^n = (h_i^n, q_i^n)^T \in \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda (\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t \tilde{S}_i^n$$

mit

$$\tilde{F}_{i+1/2}^n = ((\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1, (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2)^T = (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2, \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4)^T ,$$

$$\tilde{S}_i^n = \begin{cases} \left( \begin{array}{c} 0 \\ \tilde{g}_i^n \left( \frac{h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n}{4} \right) \end{array} \right) & \text{für } u_i^n = 0 \\ \left( \begin{array}{c} 0 \\ g(u_i^n) h_i^{n+1} \end{array} \right) & \text{sonst ,} \end{cases}$$

$$\tilde{g}_i^n = \min \left[ \sin \zeta + R, \max \left( \beta \left( \frac{h_{i+1}^n - h_{i-1}^n}{2\Delta x} \right), \sin \zeta - R \right) \right]$$

und

$$R = \cos \zeta \tan \delta .$$

Für dieses Verfahren ist nach den obigen Überlegungen der folgende Satz bewiesen.

**Satz 4** *Das Verfahren 2 erhält alle Gleichgewichtslösungen  $(h, hu)$  einer ruhenden granularen Masse der Gleichungen (2.22).*

Nun soll untersucht werden, ob das Verfahren 2 auch in der Lage ist, eine rutschende granuläre Masse anzuhalten. Für kleiner werdende Gradienten in der Höhe  $h$  und kleine Geschwindigkeiten  $u$  soll das Verfahren also in den Zustand eines Gleichgewichts mit  $u = 0$  übergehen können. Betrachtet man nun aber für den Fall kleiner Geschwindigkeiten  $u_i^n$  die Momentengleichung

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \lambda [(\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2 - (\tilde{F}_{i-1/2}^n)^2] + \Delta t g(u_i^n) h_i^{n+1}$$

mit

$$(\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2 = \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4 ,$$

so stellt man fest, dass die ersten Terme der rechten Seite i.d.R. klein sein werden, der letzte jedoch hinreichend groß werden kann, um das Abklingen von  $q$  und damit das von  $u$  zu verhindern. Da außerdem  $g_i^n = g(u_i^n)$  für  $u_i^n \neq 0$  gilt, wobei die Funktion  $g$  durch

$$g(u) = \sin \zeta - \operatorname{sgn}(u) R = \sin \zeta - \operatorname{sgn}(u) \cos \zeta \tan \delta$$

gegeben ist (siehe Kapitel 2), wird  $g(u_i^n)$  für  $\tan \zeta < \tan \delta$  immer ein  $u_i^n$  entgegen gesetztes Vorzeichen haben. Da in den Größen  $h$  und  $q = hu$  statt in  $h$  und  $u$  gerechnet wird und im Falle positiver Höhen  $\operatorname{sgn}(q) = \operatorname{sgn}(u)$  gilt, werden die folgenden Überlegungen für  $q$  anstatt für  $u$  gemacht. Der Fall  $u = 0$  ist dann außerdem äquivalent zu  $q = 0$ . Ist  $q_i^n$  also betragsmäßig klein, so würde der Beitrag von  $g(u_i^n)$  dazu führen, dass das Moment evtl. im nächsten Schritt betragsmäßig sogar noch kleiner wird, spätestens nach einigen wenigen Schritten aber das Vorzeichen wechselt. Tatsächlich kann die Reibung jedoch keinen Vorzeichenwechsel in dem Moment bzw. der Geschwindigkeit herbeiführen. In [8] und [9] wird für ein ähnliches Modell, basierend auf den Flachwassergleichungen, im Fall kleiner Geschwindigkeiten  $u_i^n$  und  $\tan \zeta < \tan \delta$  das Moment und damit die Geschwindigkeit im nächsten Zeitpunkt auf Null gesetzt, was für die Simulation einer stoppenden granularen Masse auch durchaus sinnvoll erscheint. Solche Verfahren dürften allerdings Probleme mit der Simulation einer anrutschenden Masse haben.

Die Idee ist nun, die Approximationen (4.14) nicht nur für  $u_i^n = 0$  bzw.  $q_i^n = 0$  zu verwenden, sondern auch schon für betragsmäßig kleine  $q_i^n$ . Es wäre numerisch wegen Rechenungenauigkeiten ohnehin nicht möglich, sich auf den Fall  $q_i^n = 0$  zu beschränken. Eine sinnvolle obere Schranke für  $|q_i^n|$  ist sicherlich der Term  $|\Delta t g(u_i^n) h_i^{n+1}|$ , da dieser für den möglichen Vorzeichenwechsel verantwortlich wäre.

Im Fall

$$|q_i^n| < |\Delta t g(u_i^n) h_i^{n+1}|$$

sollen also auch schon die Approximationen (4.14) verwendet werden.

Nach diesen Überlegungen lautet das verbesserte Verfahren für  $U_i^n = (h_i^n, q_i^n = (hu)_i^n)^T \in \mathbb{R}^2$  wie folgt.

**Verfahren 3** ist definiert als

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t \tilde{S}_i^n$$

mit

$$\tilde{S}_i^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}_i^n \left( \frac{h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n}{4} \right) \end{pmatrix} & \text{für } |q_i^n| < |\Delta t g(q_i^n) h_i^{n+1}| \\ \begin{pmatrix} 0 \\ g(u_i^n) h_i^{n+1} \end{pmatrix} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\tilde{g}_i^n = \min \left[ \sin \zeta + R, \max \left( \beta((h_{i+1}^n - h_{i-1}^n)/2\Delta x), \sin \zeta - R \right) \right].$$

Die Flüsse  $\tilde{F}_{i+1/2}^n$  haben sich gegenüber denen aus Verfahren 2 nicht geändert.

Eine weitere Verbesserung des zuletzt vorgestellten Verfahrens erreicht man, indem man für den Fall  $|q_i^n| < |\Delta t g(q_i^n) h_i^{n+1}|$  eine Konvexkombination der Quellterme

$$\Delta t \tilde{g}_i^n ((h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n)/4)$$

und

$$\Delta t g(q_i^n) h_i^{n+1}$$

mit den Koeffizienten

$$(1 - \mu) = (1 + q_i^n / \Delta t g(q_i^n) h_i^{n+1})$$

und

$$\mu = -q_i^n / \Delta t g(q_i^n) h_i^{n+1}$$

verwendet. Je kleiner die Geschwindigkeit  $u_i^n$  ist, desto stärker wird der Einfluss des Reibterms für  $u_i^n = 0$ , während der Einfluss des Reibterms für sich bewegende Massen abnimmt. Der Übersicht halber wird das resultierende Verfahren 4 in den einzelnen Komponenten  $h_i^n$  und  $q_i^n$  statt in vektorieller Form geschrieben.

**Verfahren 4** lautet

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \lambda \left( (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1 - (\tilde{F}_{i-1/2}^n)^1 \right),$$

$$q_i^{n+1} = \begin{cases} -\lambda \left( (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2 - (\tilde{F}_{i-1/2}^n)^2 \right) \\ + (1 - \mu) \Delta t \tilde{g}_i^n \left( (h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n)/4 \right) & \text{für } |q_i^n| < |\Delta t g(q_i^n) h_i^{n+1}| \\ q_i^n - \lambda \left( (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2 - (\tilde{F}_{i-1/2}^n)^2 \right) + \Delta t g(q_i^n) h_i^{n+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\tilde{g}_i^n = \min \left[ \sin \zeta + R, \max \left( \beta \left( (h_{i+1}^n - h_{i-1}^n) / 2\Delta x \right), \sin \zeta - R \right) \right].$$

## 4.4 Ein gekoppeltes Verfahren: Verfahren 5

Für Verfahren 2, 3 und 4 lässt sich jedoch Satz 3 nicht mehr so leicht zeigen, wie dies für Verfahren 1 möglich war. Außerdem erzeugt das Verfahren bei stark unzulässigen Anfangsprofilen (d.h. Anfangsdaten mit sehr großen Gradienten, wie z.B. Riemannanfangsdaten) Oszillationen. Diese scheinen zwar recht klein und stabil zu bleiben, klingen aber zeitlich auch nicht ab. Ein Grund für das Auftreten dieser Schwingungen könnte in der Mittelung für  $h$  liegen, die man bei der Berechnung für die numerischen Flüsse  $\tilde{F}_{i+1/2}^n$  der letzten drei Verfahren benutzt. Im nächsten Kapitel findet sich für das klassische Riemannproblem ein Vergleich der exakten Lösung mit der numerischen, in der die Oszillationen deutlich zu erkennen sind (siehe Abb. 5.4).

Die Modifikation der Flüsse gegenüber denen aus Verfahren 1 hatte ihren Grund aber allein in dem Wunsch, stationäre Lösungen auch numerisch erhalten zu können. Befindet sich das System in starker Bewegung, so ist es offensichtlich weit davon entfernt, die Bewegung der granularen Masse zu stoppen und in einen stationären Zustand überzugehen. Die Verwendung der modifizierten Flüsse  $\tilde{F}_{i+1/2}^n$  erscheint in diesem Fall also unnötig, im

Fälle kleiner Geschwindigkeiten dagegen umso notwendiger. Das letzte Verfahren dieses Kapitels, Verfahren 5, soll also eine Kombination aus Verfahren 4 zur Simulation des Anrutschens und Anhaltens der Masse und Verfahren 1 für die Simulation der Dynamik sich stark bewegender Massen sein. Das gekoppelte Verfahren lautet damit

### Verfahren 5

$$\left. \begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n - \lambda((\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1 - (\tilde{F}_{i-1/2}^n)^1) \\ q_i^{n+1} &= -\lambda((\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2 - (\tilde{F}_{i-1/2}^n)^2) \\ &\quad + (1 - \mu) \Delta t \tilde{g}_i^n ((h_{i+1}^n + 2h_i^n + h_{i-1}^n)/4) \end{aligned} \right\} \text{für } |q_i^n| < |\Delta t g(q_i^n) h_i^{n+1}| ,$$

$$\left. \begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n - \lambda((F_{i+1/2}^n)^1 - (F_{i-1/2}^n)^1) \\ q_i^{n+1} &= q_i^n - \lambda((F_{i+1/2}^n)^2 - (F_{i-1/2}^n)^2) \end{aligned} \right\} \text{sonst}$$

mit

$$\tilde{g}_i^n = \min \left[ \sin \zeta + R, \max \left( \beta((h_{i+1}^n - h_{i-1}^n)/2\Delta x), \sin \zeta - R \right) \right] ,$$

$$\tilde{F}_{i+1/2}^n = ((\tilde{F}_{i+1/2}^n)^1, (\tilde{F}_{i+1/2}^n)^2)^T = (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2, \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4)^T$$

und

$$F_{i+1/2}^n = ((F_{i+1/2}^n)^1, (F_{i+1/2}^n)^2)^T = (I_1 + I_2, I_3 + I_4)^T .$$

Dieses Verfahren ist nun in der Lage, den vollständigen Bewegungsablauf einer granularen Masse vom Anrutschen bis zum Stehenbleiben zu simulieren, ohne Oszillationen zu erzeugen. Da der Hauptteil dieser Methode aus Verfahren 1 besteht, gilt zumindest in diesem Bereich der Stabilitätssatz 3. In den Bereichen, in denen auf Verfahren 4 umgeschaltet wird, ändert sich das Höhenprofil aber entweder gar nicht oder nur sehr schwach, so dass man auch hier mit nichtnegativen Höhen rechnen kann. Die numerischen Ergebnisse lassen zumindest nichts Gegenteiliges vermuten. Außerdem bleiben Gleichgewichtslösungen ruhender Massen erhalten.

# Kapitel 5

## Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt soll Verfahren 5 anhand einiger Beispiele getestet werden. Dabei sollen die Schwerpunkte auf dem Erhalt von Gleichgewichtslösungen sowie dem Anrutschen bei unzulässigen Anfangsprofilen und schließlich dem Anhalten der betrachteten Masse liegen. Im Falle eines Riemannproblems ohne Quellterm können die numerischen Ergebnisse sehr gut mit der exakten Lösung verglichen werden. Darüber hinaus wird für stark unzulässige Anfangsprofile, wie z.B. bei Riemannproblemen, ein beispielhafter Vergleich der Ergebnisse aus Verfahren 4 und 5 gegeben. Die in Kapitel 2 bei der Herleitung der SH-Gleichungen erläuterte Größe  $\varepsilon$ , die das Verhältnis von charakterischer Höhe zu charakteristischer Länge angibt, beträgt durchgehend  $\varepsilon = 0.4$ , für die Ort- und Zeitschrittweite gilt  $\Delta x = 0.05$  sowie  $\Delta t = 0.001$ , solange keine anderen Angaben gemacht werden.

### 5.1 Konstante Gleichgewichtslösungen

Als erstes soll untersucht werden, ob eine konstante Lösung unter der Annahme  $\zeta < \delta$  (Neigungswinkel  $<$  Reibwinkel) erhalten bleibt. Die Anfangsdaten seien also gegeben durch

$$h(x, t = 0) = h_0(x) = 1, \quad u(x, t = 0) = u_0(x) = 0.$$

Zusätzlich gelte  $\zeta = 0$  und  $\delta = \pi/8$  als erste Wahl sowie  $\zeta = \pi/16$  und  $\delta = \pi/8$  als zweite. Solange die Bedingung  $\zeta < \delta$  erfüllt ist, lautet die exakte Lösung für dieses konstante Anfangsprofil natürlich

$$h(x, t) = h_0(x) \quad \text{und} \quad u(x, t) = u_0(x).$$

Die numerischen Ergebnisse sind in beiden Fällen identisch und in Abbildung 5.1 nach 2000 Zeitschritten wiedergegeben. Abweichungen von der exakten Lösung sind nicht zu erkennen und zumindest bis auf Computergenauigkeit auch nicht vorhanden.

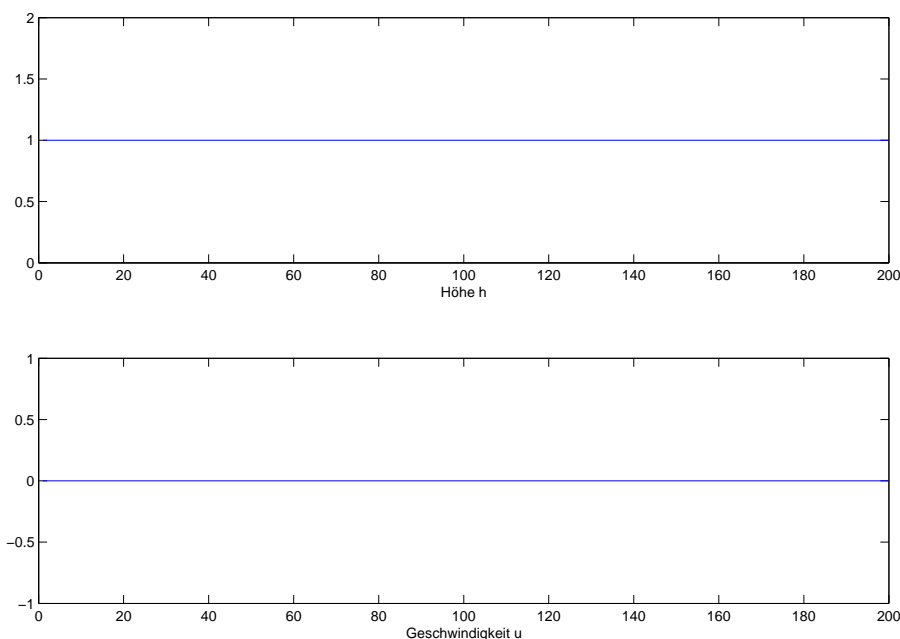


Abbildung 5.1: Bsp.1: Höhe  $h$  und Geschwindigkeit  $u$  nach 2000 Zeitschritten.

## 5.2 Klassisches Riemannproblem ohne Quellterm

Im folgenden Beispiel soll das klassische Riemannproblem ohne Quellterm, d.h.  $\zeta = \delta = 0$ , mit den Anfangsdaten

$$h(0, x) = \begin{cases} h_l & \text{für } x \leq x_0 \\ h_r & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

$$u(0, x) = 0,$$

mit  $h_l = 1$  und  $h_r = 0.5$  betrachtet werden. Für dieses Problem lautet die exakte Lösung

$$h(x, t) = \begin{cases} h_l & \text{für } x \leq \lambda_l^1 t + x_0 \\ \frac{1}{9\beta} \left[ (u_l + 2\sqrt{\beta h_l}) - \left( \frac{x-x_0}{t} \right) \right]^2 & \text{für } \lambda_l^1 t + x_0 < x \leq \lambda_m^1 t + x_0 \\ h_m & \text{für } \lambda_m^1 t + x_0 < x \leq s t + x_0 \\ h_r & \text{für } x > s t + x_0, \end{cases}$$



$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & \text{für } x \leq \lambda_l^1 t + x_0 \\ \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{x-x_0}{t} \right) + \sqrt{\beta h_l} - \frac{1}{2} u_l \right] & \text{für } \lambda_l^1 t + x_0 < x \leq \lambda_m^1 t + x_0 \\ u_m & \text{für } \lambda_m^1 t + x_0 < x \leq s t + x_0 \\ u_r & \text{für } x > s t + x_0 . \end{cases}$$

Es handelt sich also um eine Verdünnungswelle gefolgt von einer Stoßwelle. Die verwendeten Größen sind

$$\lambda_l^1 = \lambda^1(h_l, u_l) , \quad \lambda_m^1 = \lambda^1(h_m, u_m) , \quad \lambda_r^1 = \lambda^1(h_r, u_r) ,$$

wobei  $\lambda^1(h, u) = u - \sqrt{\beta h}$  der erste Eigenwert der SH-Gleichungen (2.22) in quasilinearer Form ist. Die Größe  $s$  bezeichnet die Geschwindigkeit der Stoßwelle. Für sie gilt nach den Rankine-Hugoniot-Bedingungen

$$s = \frac{h_m u_m - h_r u_r}{h_m - h_r} .$$

Zur Konstruktion der Lösung einer hyperbolischen Erhaltungsgleichung mit Riemann-Anfangsdaten sei auf [6] und [7] verwiesen.

In Abbildung 5.2 sieht man die in 5000 Zeitschritten berechnete Lösung in der Draufsicht. Sowohl der Verdünnungsfächer als auch die Stoßwelle sind sehr gut zu erkennen. Einen Vergleich mit der exakten Lösung nach 5000 Zeitschritten findet man in Abbildung 5.3. In Abbildung 5.4 sind zum Vergleich die entsprechenden Ergebnisse für das Verfahren 4 dargestellt. Die Oszillationen sind deutlich zu erkennen.

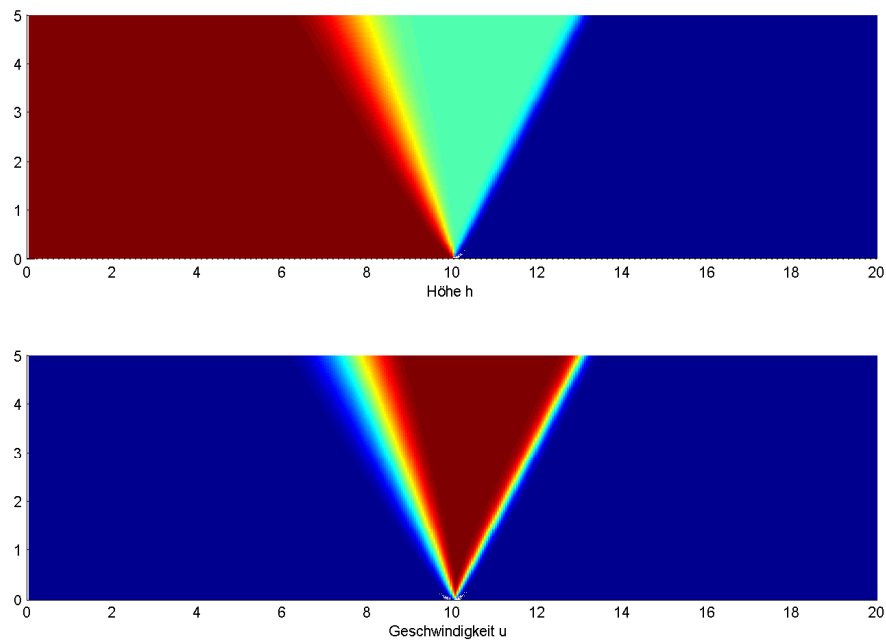


Abbildung 5.2: Bsp.2: Numerische Lösung des Riemannproblems mit  $\zeta = \delta = 0$ .

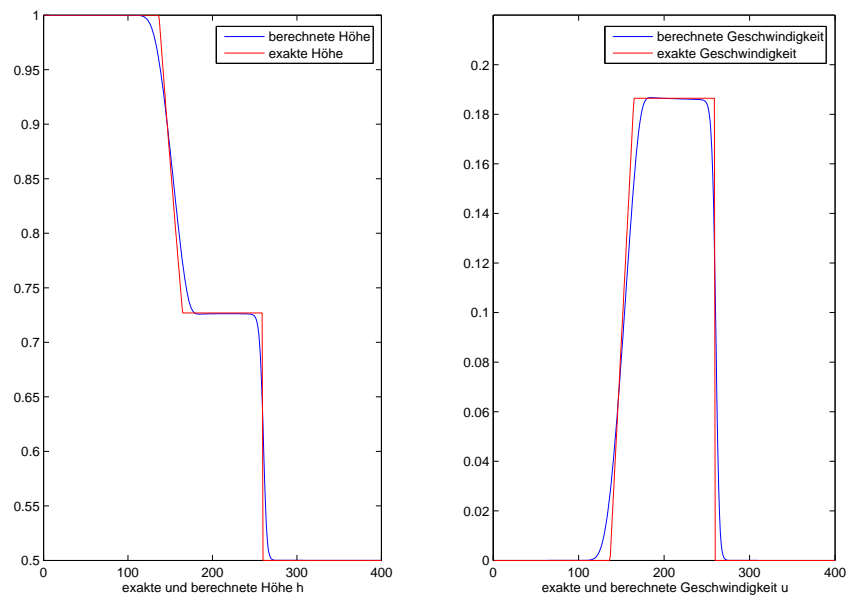


Abbildung 5.3: Bsp.2: Vergleich der exakten und der mit Verfahren 5 berechneten Lösung.

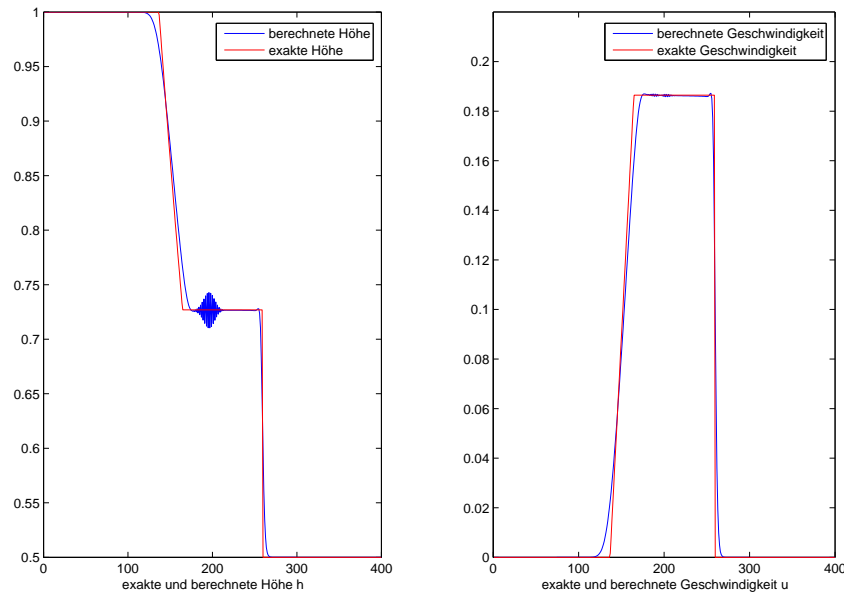


Abbildung 5.4: Bsp.2: Vergleich der exakten und der mit Verfahren 4 berechneten Lösung.

### 5.3 Riemannproblem mit Reibung

Als drittes Beispiel soll ein Riemannproblem mit den Anfangsdaten

$$h(0, x) = \begin{cases} h_l & \text{für } x \leq x_1 \\ h_m & \text{für } x_1 < x \leq x_2 \\ h_r & \text{für } x > x_2 \end{cases}$$

$$u(0, x) = 0,$$

mit  $h_l = h_r = 0.3$  und  $h_m = 2.3$  betrachtet werden. Weiter sollen 10000 Zeitschritte gemacht und  $\zeta = 0$  sowie  $\delta = \pi/10$  gesetzt werden, die Reibung wird also berücksichtigt. Dieses Problem kann analog zum „Dam-Break-Problem“ als ein eindimensionales auseinander brechendes Getreidesilo angesehen werden. Man erwartet, dass das Profil symmetrisch auseinander läuft und sich so lange verändert, bis die Gradienten des Höhenprofils hinreichend klein sind, um vom Verfahren als Gradienten einer Gleichgewichtslösung erkannt zu werden. Das Getreide wird also ähnlich dem vorherigen Beispiel anrutschen, nach einer gewissen Zeit aber aufgrund der Reibung wieder stoppen. Die Draufsicht auf Höhe und Geschwindigkeit ist in Abbildung 5.5 gegeben. Man erkennt sehr gut sowohl das Auseinanderfließen als auch das Anhalten der Masse. Eine dreidimensionale Ansicht sowie eine Darstellung des Endprofils liefern Abbildung 5.6 und Abbildung 5.7.

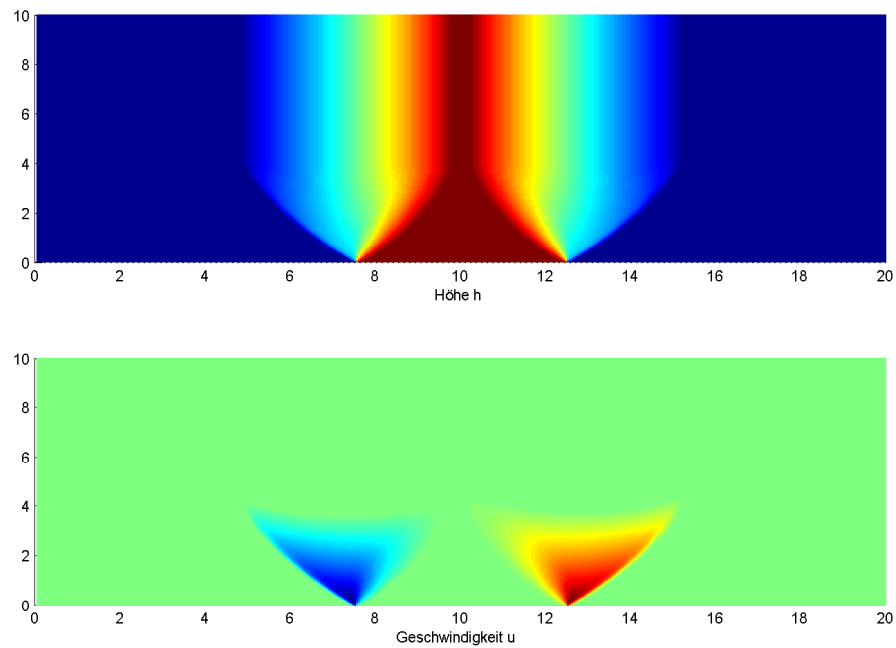


Abbildung 5.5: Bsp.3: Höhe  $h$  und Geschwindigkeit  $u$  in der Draufsicht.

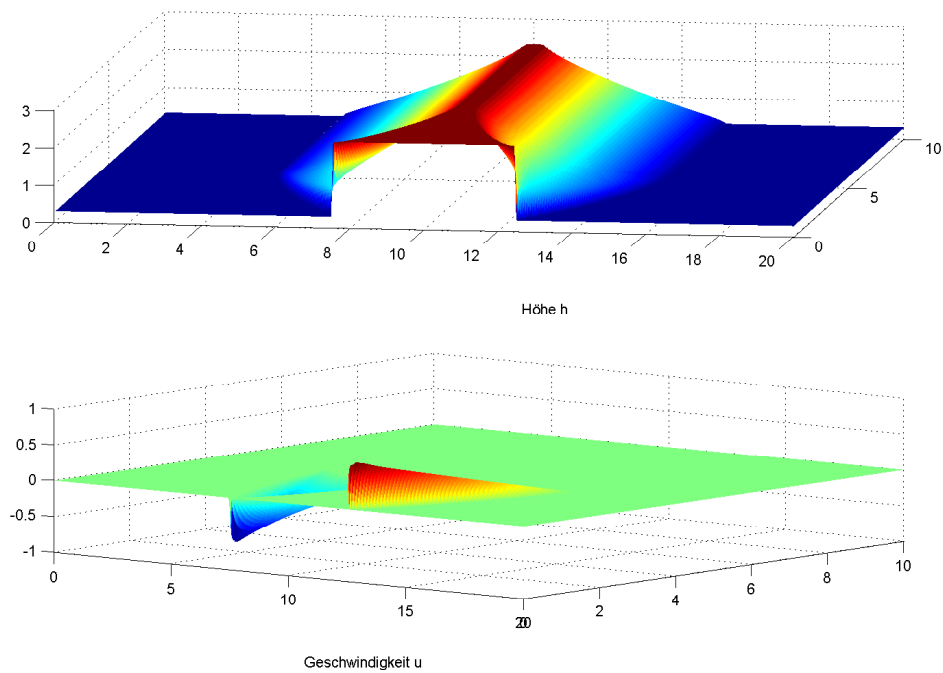


Abbildung 5.6: Bsp.3: dreidimensionale Ansicht der Höhe  $h$  und Geschwindigkeit  $u$ .

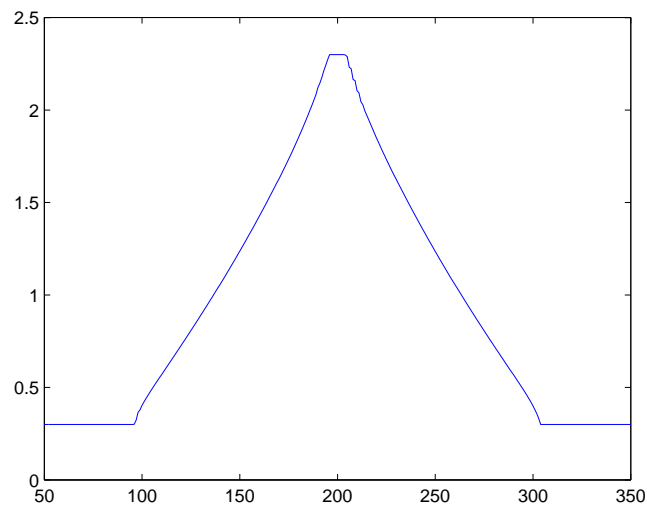


Abbildung 5.7: Bsp.3: berechnetes Endprofil

## 5.4 Geneigtes Riemannproblem mit Reibung

Als viertes Beispiel wird das vorherige Riemannproblem auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel  $\zeta = \pi/15$  und einem Reibwinkel  $\delta = \pi/5$  untersucht. Im Gegensatz zu oben erwartet man, dass das Anfangsprofil nun nicht mehr symmetrisch auseinander läuft, vielmehr sollte die Masse vermehrt nach rechts rutschen. Die Ergebnisse für 8000 Zeitschritte sieht man in Abbildung 5.8 in der Draufsicht und in Abbildung 5.9 in einer dreidimensionalen Darstellung.

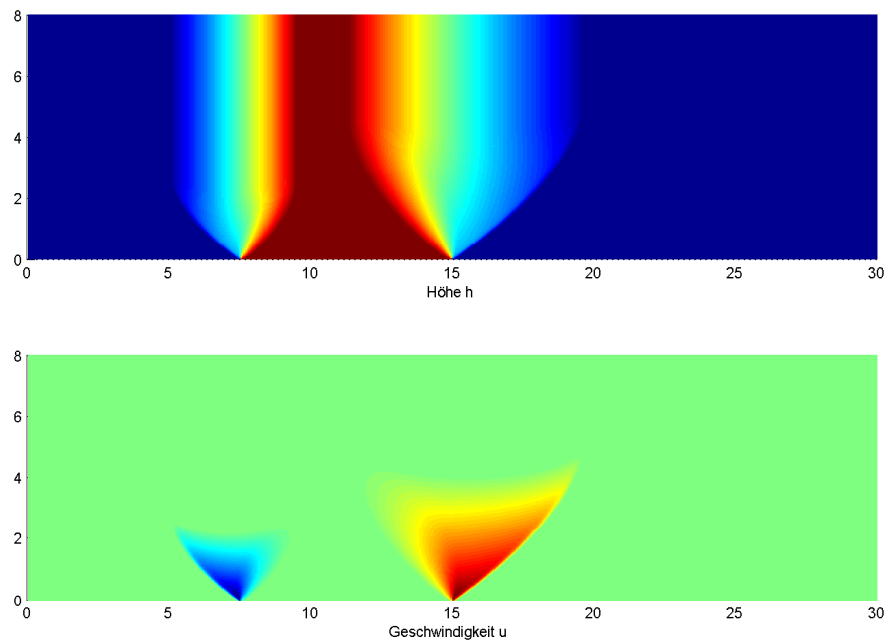


Abbildung 5.8: Bsp.4: Höhe  $h$  und Geschwindigkeit  $u$  in der Draufsicht.

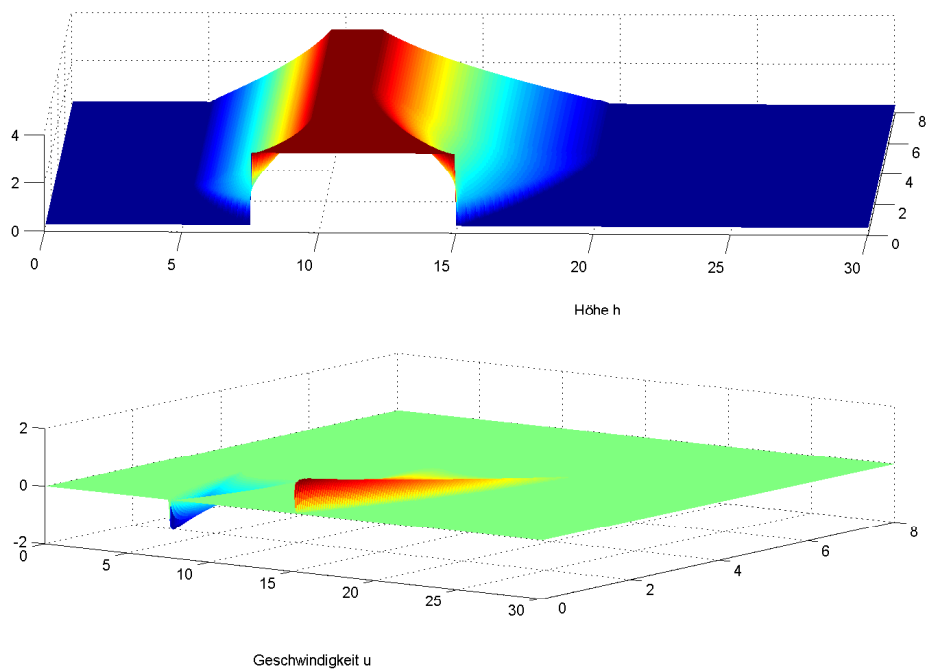


Abbildung 5.9: Bsp.4: dreidimensionale Ansicht der Höhe  $h$  und Geschwindigkeit  $u$ .

## 5.5 Parabolisches Anfangsprofil mit Reibung

Das fünfte Beispiel bildet das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}h(0, x) &= \max(K/10, K - l(x - x_0)^2) \\ u(0, x) &= 0\end{aligned}$$

mit

$$K = 1, \quad l = 4,$$

einem Reibwinkel

$$\delta = \pi/15$$

und einem Neigungswinkel

$$\zeta = 0.$$

Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.10 und 5.11 dargestellt. Wie in Beispiel 3 läuft das Profil symmetrisch auseinander und bleibt nach einiger Zeit liegen. Dabei wurden 6000 Zeitschritte verwendet.

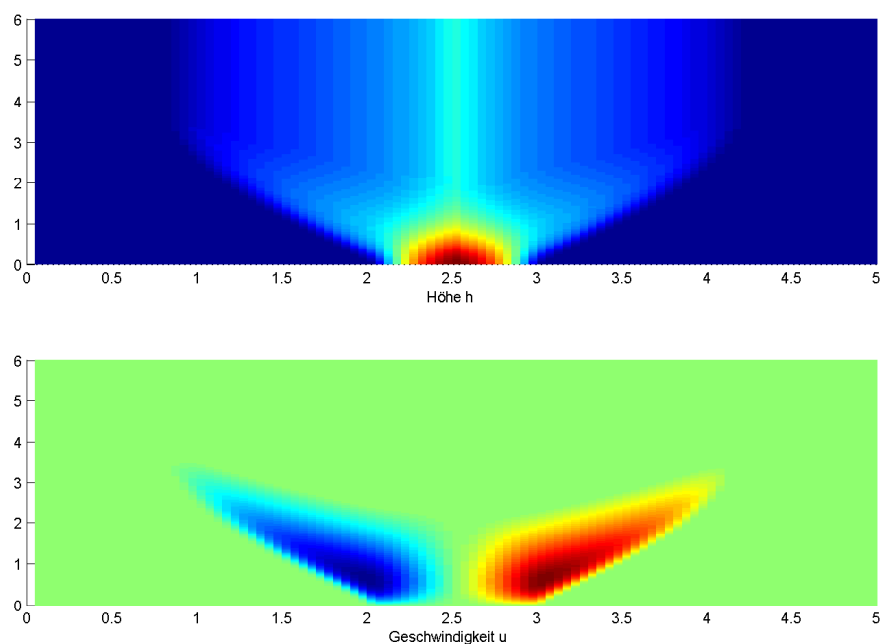


Abbildung 5.10: Bsp.5: Höhe  $h$  und Geschwindigkeit  $u$  in der Draufsicht.

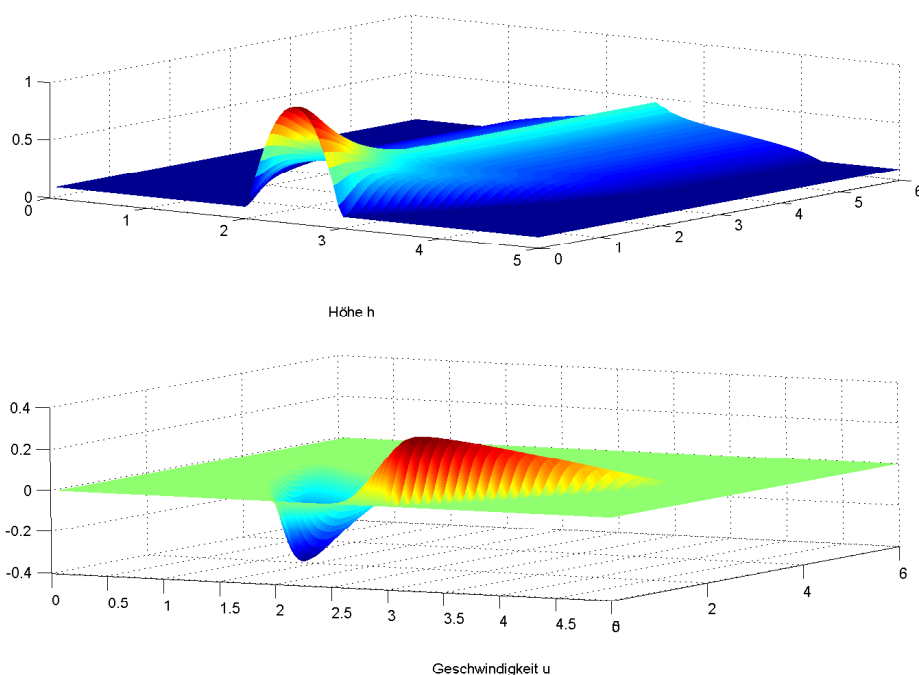


Abbildung 5.11: Bsp.5: dreidimensionale Ansicht der Höhe  $h$  und Geschwindigkeit  $u$ .

## 5.6 Beschleunigung eines sinusförmigen Profils

Zum Schluss sollen die numerischen Ergebnisse für das Anfangswertproblem

$$h_0(x) = \begin{cases} \max(0.9 \sin[\pi(x - 0.6)] - 0.3 \sin[2\pi(x - 0.6)], 0.1) & \text{für } 0.6 < x < 1.6 \\ 0.1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u(0, x) = 0$$

mit  $\varepsilon = 0.3218$ ,  $\zeta = \pi/6 = 30^\circ$  und  $\delta = \pi/18 = 10^\circ$  mit denen aus [14] für annähernd dasselbe Problem verglichen werden. Wegen  $\zeta > \delta$  kommt das Profil ins Ruschen, hält aber im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen nicht an, sondern beschleunigt ungefähr konstant. Die Ergebnisse für 4000 Zeitschritte sind in Abbildung 5.12 dargestellt und denen aus [14] sehr ähnlich. Dort wenden die Autoren ein Finite-Differenzen-Verfahren nach MacCormack auf das Problem an. Die Aufteilung eines solchen hügel förmigen Anfangsprofils in zwei kleinere und das Auseinanderlaufen dieser beiden kleineren Hügel scheinen charakteristisch für Probleme der obigen Form zu sein und werden von dem hier vorgestellten Verfahren auch für andere Anfangsprofile wiedergegeben. Die Autoren in [14] äußern jedoch Zweifel an der Richtigkeit der Ergebnisse.



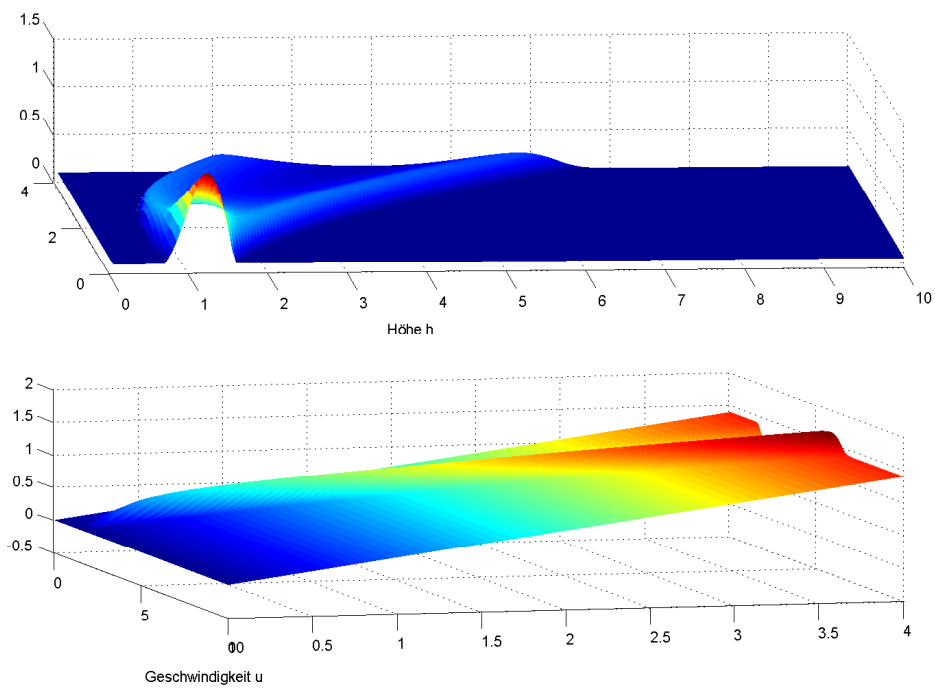


Abbildung 5.12: Bsp.6: Aufteilung und gleichmäßige Beschleunigung eines sinusförmigen Anfangsprofils.



# Kapitel 6

## Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Finite-Volumen-Verfahren in 1D für die SH-Gleichungen mit konstantem  $\beta$  vorgestellt, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

- es erhält die Gleichgewichtslösungen einer ruhenden granularen Masse, d.h. die Lösungen, für die gilt

$$\partial_t h = 0 \quad \text{und} \quad u = 0 ,$$

- es erhält die Nichtnegativität der Höhe  $h$  zumindest in dem Bereich, in dem sich die Masse stark bewegt,
- es ist in der Lage, den vollständigen Bewegungsablauf einer granularen Masse vom Anrutschen bis zum Stoppen zu simulieren.

Dieses Verfahren wurde aus der kinetischen Formulierung der SH-Gleichungen abgeleitet, wobei sich gezeigt hat, dass gerade die Forderung nach Erhaltung der physikalisch sinnvollen stationären Lösungen von Modellen, die Reibeffekte berücksichtigen, nichttrivial ist. Der Grund dafür liegt darin, dass für verschwindende Geschwindigkeiten der Quellterm aufgrund der Haftreibung nicht eindeutig definiert ist.

Eine weitere Schwierigkeit zeigte sich in der Behandlung der Gleichungen für  $\beta = \beta(x)$ , in dem die SH-Gleichungen die Form

$$\partial_t U + \partial_x F(U, x) = S$$

annehmen, also nicht mehr in Erhaltungsform geschrieben werden können. Für diesen Fall war es zwar möglich, eine kinetische Formulierung der SH-Gleichungen anzugeben (siehe Abschnitt 3.3). Man konnte jedoch die Funktion  $\chi$  nicht auf dieselbe einfache Art wie für den Fall  $\beta = \text{const}$  bestimmen. Für konstantes  $\beta$  konnte man die Bedingung

$$\partial_t h = 0 \quad \text{und} \quad u = 0$$

zusammen mit der im Gleichgewicht herrschenden Beziehung

$$\beta \partial_x h = g$$

in die kinetische Formulierung der SH-Gleichungen einsetzen und anschließend  $\chi$  als eindeutige Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmen. Dieses Vorgehen war für  $\beta = \beta(x)$  nicht möglich, weshalb das Verfahren lediglich für den Fall  $\beta = \text{const}$  konstruiert wurde. Es zeigte sich aber in Kapitel 4, dass es nicht nur auf die Wahl der Funktion  $\chi$  ankommt, um die gewünschten Gleichgewichtslösungen erhalten zu können, sondern wesentlich auf die Diskretisierung des Quellterms.

Mögliche Weiterführungen dieser Arbeit sind durch die folgenden Punkte gegeben:

- Konvergenzuntersuchungen für das hier vorgestellte Verfahren,
- die Erweiterung des Verfahrens auf den zweidimensionalen Fall,
- die Konstruktion eines Verfahrens mit den oben genannten Eigenschaften für den Fall  $\zeta = \zeta(x)$ ,
- weitere Genauigkeitsuntersuchungen sowie die Konstruktion eines Verfahrens höherer Ordnung,
- die Konstruktion alternativer Verfahren durch eine andere Behandlung des Quellterms (z.B. könnte man die Reibung als Bodentopographie interpretieren (siehe [10])),
- und schließlich die Konstruktion alternativer Verfahren durch die Verwendung anderer Reibungsmodelle.

# Literaturverzeichnis

- [1] Balean,R.: Granular avalanche flow down a smoothly varying slope: the existence of entropy solutions
- [2] Brilliantov,N.V., Pöschel,T. (Eds.): Granular Gas Dynamics. Springer (2003)
- [3] Brilliantov,N.V., Pöschel,T.: Kinetic Theory of Granular Gases. Oxford University Press (2004)
- [4] Cercignani,C., Illner,R., Pulvirenti,M.: The Mathematical Theory of Dilute Gases. Springer (1994)
- [5] Katsaounis,Th., Perthame,B., Simeoni,C.: Upwinding Sources at Interfaces in conservation laws. Appl.Math.Lett. (2003)
- [6] LeVeque,R.J.: Numerical Methods for Conservation Laws. Birkhäuser Verlag (1990)
- [7] LeVeque,R.J.: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press (2002)
- [8] Mangeney-Castelnau,A., Vilotte,J.P., Bristeau,M.O., Bouchut,F., Perthame,B., Simeoni,C., Yernini,S.: A new kinetic scheme for Saint-Venant equations applied to debris avalanches. INRIA: Rapport de recherche n° 4646 (2002)
- [9] Mangeney-Castelnau,A., Vilotte,J.P., Bristeau,M.O., Bouchut,F., Perthame,B., Simeoni,C., Yernini,S.: Numerical modeling of avalanches based on Saint-Venant equations using a kinetic scheme. Journal of Geophysical Research, Vol. 108, No.B11, 2527 (2003)
- [10] Mangeney-Castelnau,A., Bouchut,F., Vilotte,J.P., Aubertin,A., Pirulli,M.: On the use of Saint Venant equations to simulate the spreading of a granular mass. Journal of Geophysical Research, Vol. 110, B09103 (2005)
- [11] Perthame,B.: Kinetic Formulation of Conservation Laws. Oxford University Press (2002)

- [12] Perthame,B., Simeoni,C.: A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term. *Calcolo* 38, 201-231 (2001)
- [13] Perthame,B., Simeoni,C.: Convergence of the Upwind Interface Source method for hyperbolic conservation laws. Springer (2003)
- [14] Savage,S.B., Hutter,K.: The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.* (1998), vol. 199, pp. 177-215
- [15] Savage,S.B., Hutter,K.: The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part 1: Analysis. *Acta Mechanica* (1991), vol. 86, pp. 201-223
- [16] Struckmeier,J.: On a kinetic Model for Shallow Water Waves. *Mathematical Methods in the Appl. Sciences*, Vol.18 (1995) 709-722

# Danksagung

## Herzlicher Dank geht an

Herrn Prof. Dr. Struckmeier für die hervorragende Betreuung und das interessante Thema.

Herrn Prof. Dr. Gasser für die sehr hilfreichen Anmerkungen.

Morten Vierling für seine Unterstützung und viele hilfreiche Tipps.

Meine Eltern Gisela und Joachim Kaland für ihre Unterstützung und Korrekturhilfen.





## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet habe.

Hamburg, 26. März 2007

