Übungsblatt 9 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 3. Juli 2013
Abgabe am 02.07.2013

Aufgabe 1:

(a) Sei $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Zeigen Sie, dass für jede Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung

$$X^3 + Y^3 = m$$

die Abschätzung $\max\{|x|, |y|\} \leq 2\sqrt{\frac{m}{3}}$ gilt.
Hinweis: Faktorisieren Sie $X^3 + Y^3$.
(b) Sei $m \in \mathbb{Z}$. Folgern Sie aus dem Satz von Thue (für $\alpha = 2^{1/3}$), dass die Gleichung

$$X^3 - 2Y^3 = m$$

nur endlich viele ganzzahlige Lösungen hat.

Aufgabe 2:
Sei $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ ganzalgebraisch vom Grad n und sei $H = H(P_\alpha)$ die Höhe des Minimalpolynoms P_α von α. Für $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sei

$$\alpha^s = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,s}\alpha^j, \ b_{j,s} \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie

$$\max_{0 \leq j \leq n-1} \{|b_{j,s}|\} \leq (2H)^s.$$

Aufgabe 3:
Sind $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x]$, so ist die *Wronski-Determinante* von $f_1, \dots, f_n$ definiert als

$$W_{f_1,\dots,f_n}(x) = \det\left(\left(f_j^{(i)}(x)\right)_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq i \leq n}}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $f_1, \dots, f_n$ linear abhängig über $\mathbb{R}$ sind, falls $W_{f_1,\dots,f_n}(x)$ identisch 0 ist.
Hinweis: Verwenden Sie Induktion über n. Betrachten Sie im Induktionsschritt ein Intervall I, sodass $W_{f_1,\dots,f_n}(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k^{(j)}(x) y_k(x) = f_n^{(j)}(x), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad x \in I.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n-1} f_k^{(j)}(x) y_k'(x) = 0$ für alle $j = 0, \dots, n-1$ und $x \in I$ gilt und schließen Sie unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung, dass $f_1, \dots, f_n$ linear abhängig sind.
(b) Seien P, Q wie im Beweis von Lemma V.4, wobei L durch $L = \left\lfloor \frac{1}{2}(1 + \delta)nk \right\rfloor$ mit $0 < \delta < 1$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass $W_{P,Q}(x)$ nicht identisch 0 ist.