Übungsblatt 8 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 20. Juni 2013
Abgabe am 25.06.2013

Aufgabe 1:
Beweisen Sie die im Beweis der Transzendenz von π verwendete komplexe Variante von Lemma IV.2:
Sei $f \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad m und sei

$$I_f(z) = \int_0^z e^{z-u} f(u) du,$$

wobei wir entlang des Geradensegments von 0 nach z integrieren.
(a) Zeigen Sie

$$I_f(z) = e^z \left(\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) \right) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(z).$$

(b) Zeigen Sie

$$|I_f(z)| \leq |z| e^{|z|} \sup_{u \in \mathbb{C}, |u| \leq |z|} |f(u)|$$

und korrigieren Sie die im Beweis von Satz IV.4 angegebene obere Schranke für $|H|$.

Aufgabe 2:

(a) Verwenden Sie den Satz von Lindemann-Weierstraß, um zu zeigen, dass $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ für $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ transzendent sind.
(b) Wir nennen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ *algebraisch unabhängig über* $\mathbb{Q}$, falls es kein nichttriviales Polynom $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ gibt mit $P(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$. Zeigen Sie, dass der Satz von Lindemann-Weierstraß äquivalent zur folgenden Aussage ist:

Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, so sind $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3:
Sei log ein beliebiger Zweig des komplexen Logarithmus. Die folgende Aussage ist eine ineffektive Variante eines Satzes von Baker (1966):

Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ sodass $\log(\alpha_1), \ldots, \log(\alpha_n)$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind, dann ist $\beta_1 \log(\alpha_1) + \ldots + \beta_n \log(\alpha_n)$ transzendent.

(a) Sei $n \geq 1$, seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ mit $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \notin \mathbb{Q}^n$ und $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}$. Leiten Sie folgende Aussage aus dem ineffektiven Satz von Baker ab:

Gibt es kein Tupel $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ mit $\alpha_1^{d_1} \cdots \alpha_n^{d_n} = 1$, so ist

$$e^\gamma \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$$

transzendent.

Dr. J.S. Müller · Geom 335 · http://www.math.uni-hamburg.de/home/js.mueller/dioapp.html · jan.steffen.mueller@uni-hamburg.de

Hinweis: Führen Sie die Annahme, dass $\delta := e^{\gamma}\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ algebraisch ist zum Widerspruch. Zeigen Sie hierfür zunächst, dass $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n, \log\delta$ und $\log(-1)$ linear abhängig über $\mathbb{Q}$ sein müssen.

(b) Sei $n \geq 1$, seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ und $\gamma, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ mit $\gamma \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Transzendenz von

$$e^{\gamma}\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$$

aus dem ineffektiven Satz von Baker folgt.

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über n.