Übungsblatt 7 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 5. Juni 2013
Abgabe am 18.06.2013

Aufgabe 1:

(a) Sei $A \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \{0, 1, \ldots, A-1\}$ für alle $n \geq 1$ sodass $a_n \neq 0$ für unendlich viele n gilt. Zeigen Sie, dass

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A^{n!}}$$

eine Liouvillesche Zahl ist.
(b) Folgern Sie, dass es überabzählbar viele Liouvillesche Zahlen gibt.

Aufgabe 2:
In dieser Aufgabe soll die Kettenbruchentwicklung der Eulerschen Zahl e berechnet werden. Diese wurde zuerst 1737 von Euler mithilfe der riccatischen Differentialgleichung berechnet, allerdings war sein Beweis nicht komplett. Ein rigoroser Beweis wurde 1871 von Hermite als Nebenprodukt seines Beweises der Transzendenz von e gefunden. Wir folgen hier einer 2006 von Cohn veröffentlichten kurzen Variante dieses Beweises.

Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sei $a_{3n+1} = 2n$ und $a_{3n} = a_{3n+2} = 1$. Wir definieren zunächst $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = a_0 a_1 + 1$ und $Q_1 = a_1$. Für $n \geq 2$ seien

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \quad \text{und} \quad Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

d.h. für $n \neq 1$ ist P_n/Q_n der n-te Näherungsbruch des Kettenbruchs $[a_0, a_1, \ldots]$.
Außerdem definieren wir

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^n}{n!} e^x dx$$
$$B_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} (x-1)^n}{n!} e^x dx$$
$$C_n = \int_0^1 \frac{x^n (x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx$$

(a) Zeigen Sie, dass die Integrale A_n, B_n und C_n die folgenden Rekursionsformeln für $n \geq 1$ erfüllen:

$$A_n = -B_{n-1} - C_{n-1}$$
$$B_n = -2n A_n + C_{n-1}$$
$$C_n = B_n - A_n.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 0$ gilt:

$$A_n = Q_{3n} e - P_{3n}$$
$$B_n = P_{3n+1} - Q_{3n+1} e$$
$$C_n = P_{3n+2} - Q_{3n+2} e$$

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = e$$

und schließen Sie

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots].$$

Aufgabe 3:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ und Näherungsbrüchen P_n/Q_n. Wir definieren λ_n für $n \geq 1$ durch

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| = Q_n^{-\lambda_n}.$$

(a) Zeigen Sie

$$\frac{1}{2Q_nQ_{n+1}} < \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_nQ_{n+1}}.$$

(b) Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n = \mu(\alpha).$$

(c) Schließen Sie

$$\mu(\alpha) = 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln Q_{n+1}}{\ln Q_n} = 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln Q_n}.$$

(d) Zeigen Sie $\mu(e) = 2$. Insbesondere ist e also keine Liouvillesche Zahl.

Aufgabe 4:
Die Irrationalität der Eulerschen Zahl e kann folgendermaßen besonders einfach bewiesen werden: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $b \geq 1$. Wähle $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq b$ und definiere

$$\alpha := m! \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

(a) Zeigen Sie $0 < \alpha < 1$.
(b) Zeigen Sie, dass aus $e = \frac{a}{b}$ Ganzzahligkeit von α folgen würde.