Übungsblatt 6 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 23. Mai 2013
Abgabe am 04.06.2013

Aufgabe 1:
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper mit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ quadratfrei.
(a) Zeigen Sie

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega] = \{x + y\omega : x, y \in \mathbb{Z}\},$$

wobei

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{falls } d \equiv 2,3 \pmod 4 \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen $\mathcal{O}_K^\times$ und der Menge der ganzzahligen Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung

$$\begin{cases} x^2 - dy^2 = \pm 1, & \text{falls } d \equiv 2,3 \pmod 4 \\ x^2 - dy^2 = \pm 4, & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

gibt.

Aufgabe 2:

(a) Sei $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ kein Quadrat. Zeigen Sie, dass die Periode der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ gerade ist falls $d \equiv 3 \pmod 4$.
(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage in (a) nicht gilt, indem Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{34}$ berechnen.
(c) Berechnen Sie die Fundamentallösung von $x^2 - dy^2 = 1$ für $d = n^2 + 2$, wobei $n \geq 1$.
(d) Berechnen Sie die Fundamentallösung von $x^2 - dy^2 = 1$ für $d \in \{10, 13, 29\}$.

Aufgabe 3:

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Körper ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ abzählbar ist.

Aufgabe 4:

(a) Sei $A \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \{0, 1, \ldots, A-1\}$ für alle $n \geq 1$ sodass $a_n \neq 0$ für unendlich viele n gilt. Zeigen Sie, dass

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A^{n!}}$$

eine Liouvillesche Zahl ist.
(b) Folgern Sie, dass es überabzählbar viele Liouvillesche Zahlen gibt.