**Übungsblatt 5 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 7. Mai 2013**
Abgabe am 14.05.2013

**Aufgabe 1:**

**(a)** Finden Sie ein primitives Element des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
**(b)** Sei $K$ ein Zahlkörper. Finden Sie alle Einbettungen (d.h. alle Ringhomomorphismen) $K \hookrightarrow \mathbb{C}$.

**Aufgabe 2:**
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch vom Grad $d$. Zeigen Sie, dass es für jedes Element $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ eindeutig bestimmte $b_0, \dots, b_{d-1} \in \mathbb{Q}$ gibt, sodass

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1},$$

also dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein $d$-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis

$$(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$$

ist.

**Aufgabe 3:**
Für eine reell-quadratische Irrationalzahl $\alpha = a + b\sqrt{d}$ sei $\alpha' = a - b\sqrt{d}$. Dann heißt $\alpha$ *reduziert*, wenn $\alpha > 1$ und $-1 < \alpha' < 0$ gelten.

Sei $\alpha$ eine reduzierte reell-quadratische Irrationalzahl mit Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ und vollständigen Quotienten $\alpha_n$.
**(a)** Zeigen Sie, dass alle $\alpha_n$ ebenfalls reduziert sind und dass $a_n = \left\lfloor -\frac{1}{\alpha'_{n+1}} \right\rfloor$ gilt.
**(b)** Schließen Sie, dass die Kettenbruchentwicklung von $\alpha$ reinperiodisch ist.

**Aufgabe 4:**
Sei $d \in \mathbb{Z}$ kein Quadrat.
**(a)** Finden Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d} + \lfloor\sqrt{d}\rfloor$.
**(b)** Zeigen Sie, dass die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ von der Form

$$\sqrt{d} = \left[\lfloor\sqrt{d}\rfloor, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor}\right]$$

ist.