Übungsblatt 3 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 16. April 2013
Abgabe am 30.04.2013

Aufgabe 1:
Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ und $q \geq 1$ eine *beste Approximation 1. Art für* α, wenn für alle $\frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$ mit $1 \leq q' \leq q$ und $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$ gilt:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right|.$$

Die in der Vorlesung eingeführten besten Approximationen werden auch *beste Approximation 2. Art für* α genannt.

(a) Berechnen Sie alle besten Approximationen 1. und 2. Art für $\alpha \in \left\{\frac{47}{23}, \frac{13}{101}, \frac{14}{37}\right\}$.

(b) Zeigen Sie, dass eine beste Approximation 2. Art auch eine beste Approximation 1. Art ist, dass die Umkehrung jedoch nicht immer gilt.

Aufgabe 2:
Seien $a_0, a_1, \ldots$ Variablen und seien P_n und Q_n für $n \geq -2$ wie in der Vorlesung definiert.

(a) Zeigen Sie, dass

$$Q_n P_{n-2} - P_n Q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$$

für alle $n \geq 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

(c) Seien jetzt $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ mit $a_i > 0$ für $i > 0$. Zeigen Sie

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \ldots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}.$$

Aufgabe 3:
Das Sonnenjahr hat ca. $365 + \alpha$, Tage, wobei $\alpha \sim 0.24219878$. Für den Rest der Aufgabe nehmen wir an, dass dieser Wert von α exakt ist. Im Gregorianischen Kalender werden in 400 Jahren genau 97 Schaltjahre eingefügt.

(a) Nach wievielen Jahren hat der Gregorianische Kalender einen Fehler von mehr als einem Tag?

(b) Finden Sie ein $n \geq 1$, sodass das Weglassen eines Schaltjahres in $n \cdot 400$ Jahren im Gregorianischen Kalender dazu führt, dass erst nach 88653 Jahren ein Fehler von mehr als einem Tag entsteht.

(c) Das Jahr eines sogenannten *Lunisolarkalenders* hat 12 synodische Monate (oder Mondmonate), wobei ein synodischer Monat $29 + \beta$ Tage hat, mit $\beta \sim 0.530589$. Für den Rest der Aufgabe nehmen wir an, dass dieser Wert von β exakt ist. Um ein so definiertes Jahr an das Sonnenjahr anzugleichen, werden i.d.R. in n Jahren m zusätzliche synodische Monate eingefügt, wobei n und m geeignete natürliche Zahlen sind.

Zeigen Sie, dass die Wahl $n = 19$, $m = 7$ zu dem geringsten Fehler für alle n mit $n < 300$ führt. Dies wird u.a. im Jüdischen Kalender verwendet.

Aufgabe 4:

Für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ seien $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $Q > 1$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen $p_1, \dots, p_n$ und $q_1, \dots, q_m$ mit

$$1 \leq \max\{|q_1|, \dots, |q_m|\} < Q^{n/m}$$

gibt, sodass

$$|\alpha_{i1}q_1 + \ldots + \alpha_{im}q_m - p_i| \leq \frac{1}{Q}$$

für $i = 1, \dots, n$ gilt.

(b) Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}, 1$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind, so gibt es unendlich viele Tupel $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Z}^{n+m}$ mit

$$q := \max\{|q_1|, \dots, |q_m|\} \geq 1$$

und

$$|\alpha_{i1}q_1 + \ldots + \alpha_{im}q_m - p_i| \leq \frac{1}{q^{m/n}}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.