Übungsblatt 2 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 15. April 2013
Abgabe am 16.04.2013

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-4^n}$ approximierbar von Ordnung 4 ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n^4}$ approximierbar von Ordnung 2 ist.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$ die Menge

$$N_\epsilon = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist approximierbar von Ordnung } 2 + \epsilon\}$$

Lebesgue-Maß 0 hat.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die folgende höherdimensionale Variante des Dirichletschen Approximationssatzes:
(a) Sei $Q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Dann gibt es $p_1, \ldots, p_n, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq q < Q^n$ und

$$|q\alpha_i - p_i| \leq \frac{1}{Q} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

(b) Ist $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so gibt es unendlich viele Tupel $(p_1, \ldots, p_n, q) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ mit $q \geq 1$ und

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < q^{-1-\frac{1}{n}} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$