Übungsblatt 1 zur Vorlesung Diophantische Approximation, 6. April 2013
Abgabe am 09.04.2013 zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1:

(a) (Division mit Rest) Seien a, b ganze Zahlen mit $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < |b|$ und $a = bq + r$ gibt.
(b) (Euklidischer Algorithmus) Seien $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $|u| \geq |v|$. Wir definieren ganze Zahlen $r_{-1}, r_0, r_1, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots$ folgendermaßen:

(i) Wir setzen $r_{-1} = u$ und $r_0 = v$.

(ii) Für $j = 0, 1, \ldots$ sei
$$r_{j-1} = q_{j+1} r_j + r_{j+1},$$
mit $0 \leq r_{j+1} < r_j$.

Zeigen Sie, dass es ein $n \geq 0$ mit $r_n = 0$ gibt und dass für das kleinste $n \geq 0$ mit dieser Eigenschaft $r_{n-1} = \mathrm{ggT}(u, v)$ gilt.
(c) (Lemma von Bézout) Seien $u, v, w \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$ux + vy = w$$
genau dann eine Lösung $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ besitzt, wenn w ein Vielfaches von $\mathrm{ggT}(u, v)$ ist.
(d) Seien $(x, y), (u, v) \in \mathbb{Z}^2$ jeweils teilerfremd, sodass gilt:

(i) $y \geq 1$

(ii) $vx - uy = \mathrm{ggT}(u, v)$

(iii) Ist $(x', y') \in \mathbb{Z}^2$ mit $vx' - uy' = \mathrm{ggT}(u, v)$ und $y' \geq 1$, so ist $y \leq y'$.

Zeigen Sie, dass für jede beste Approximation $\frac{p}{q}$ von $\frac{u}{v}$ mit $q \geq y$ entweder $\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$ oder $\frac{p}{q} = \frac{u}{v}$ gilt.

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie, dass der Approximationsexponent $\mu(\alpha)$ einer beliebigen reellen Zahl α mindestens 1 ist.
(b) Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>1}$. Zeigen Sie, dass es für eine rationale Zahl $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ nur endlich viele teilerfremde Paare $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ mit
$$\left| \frac{u}{v} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\delta}$$
gibt.
(c) Zeigen Sie $\mu(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$.