Aufgaben zum Vorkurs Mathematik: Aussagenlogik und Mengenlehre
Für Montag den 26.9.2011

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind etwas schwerer. Dort braucht man evtl. eine gute Idee, um die Lösung zu finden.

Aufgabe 1:
Schreiben Sie die folgenden Aussagen als Formel:

(a) Für jede natürliche Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die doppelt so groß ist.

(b) Es gibt keine größte natürliche Zahl.

(c) Ist die Summe zweier ganzer Zahlen gerade, so ist es auch ihre Differenz.

Aufgabe 2:
Schreiben Sie die folgenden Formeln als Sätze:

(a) $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 7 \Rightarrow x > 5$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R} : \neg x \in \mathbb{Q}$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists y \in \mathbb{Q} : |x - y| < \epsilon$.

Aufgabe 3:
Welche Verknüpfung von Aussagen bedeutet *entweder A oder B*?

Aufgabe 4:
Betrachten Sie die folgenden Aussagen und Formeln für natürliche n:

$$\begin{array}{lll} A_1 : \frac{3}{2} < n < \frac{9}{4} & A_2 : n + 4 = 13 & A_3 : 2|3 \\ B_1 : (n > 7) \vee (2|n) & B_2 : 1 + 1 = 2 & B_3 : n = 2 \end{array}$$

Überlegen Sie für alle neun Fälle ($i, j \in \{1, 2, 3\}$), ob $A_i \Rightarrow B_j$, $A_i \Leftrightarrow B_j$ oder keines von beidem gilt.

Aufgabe 5:
(a) Johannas Katze niest immer bevor es regnet. Heute hat sie geniest. „Also wird es regnen", denkt Johanna. Hat sie recht?

(b) Peter hat gesagt: „Vorgestern war ich 10, aber im nächsten Jahr werde ich 13." Ist das möglich?

Aufgabe 6:
Geben Sie drei unterschiedliche unendliche Teilmengen der natürlichen Zahlen an.

Aufgabe 7:
Es seien $M_1 = \{4, 8, 12\}$, $\quad M_2 = \{3, 6, 9\}$, $\quad M_3 = \{0, 2, 4, 6\}$, $\quad M_4 = \{6, 12, 18\}$.
Bestimmen Sie:

(a) $((M_1 \cup M_2) \cap M_3) \setminus M_4$,

(b) $(M_2 \setminus (M_1 \cup M_3)) \cap M_4$,

(c) $(M_1 \cup (M_3)) \cap (M_4 \setminus M_1)$,

(d) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3 \cap M_4)$.

Aufgabe 8:
Für welche Mengen $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ sind die folgenden Aussagen wahr?

(a) $\forall x \in M \quad \exists y \in M : y^2 = x$.

(b) $\exists x \in M \quad \forall y \in M : xy = x$.

(c) $\forall x \in M \quad \exists y \in M : xy = 1$.

Aufgabe 9:
Seien M und N zwei Mengen. Zeigen Sie, dass für die Potenzmengen gilt

$$\mathcal{P}(M) \cup \mathcal{P}(N) \subset \mathcal{P}(M \cup N)$$

und geben Sie ein Beispiel, bei dem Ungleichheit ($\subsetneq$) gilt.

Aufgabe 10:
Bilden Sie die Potenzmenge folgender Mengen

(a) $M_1 = \{3, 4, 5\}$,

(b) $M_2 = \emptyset$,

(c) $M_3 = \{A, C\}$.

Aufgabe 11:
Zerlegen Sie die folgenden Zahlen in ihre Primfaktoren (ohne den Taschenrechner zu benutzen):

(a) 480, 1845, 3900, 17325

(b*) Ihre Matrikelnummer (hier ist evtl. ein Taschenrechner notwendig)

Aufgabe 12:
Berechnen Sie (ohne technische Hilfe):

(a)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{2} - \frac{17}{5}\right), \quad \frac{16 \cdot 3 - 8}{25 + 3 - 4} + \frac{3^2 - 21}{30 + 2 \cdot 3}, \quad \frac{1 + 2^3}{4 \cdot \frac{3}{7}}$$

(b)

$$1223 \cdot 42, \quad 13728 : 13$$

(c)

$$7!, \quad \binom{6}{2}, \quad |6 - 3 \cdot 4| + 417$$

Aufgabe 13:
(a) Zeigen Sie

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

(b) Wie berechnet man ggT und kgV von natürlichen Zahlen?

Aufgabe 14*:
(a) Geben Sie unendlich viele paarweise verschiedene Teilmengen $A_i \subset \mathbb{N}$ $(i = 1, 2, \dots)$ an deren Schnitt nicht leer ist, d.h.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset.$$

(b) Geben Sie unendlich viele paarweise verschiedene Teilmengen $A_i \subset \mathbb{N}$ $(i = 1, 2, \dots)$ an deren Vereinigung nicht ganz $\mathbb{N}$ ist, d.h.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \mathbb{N}.$$

(c) Gibt es Mengen, für die beide genannten Eigenschaften **(a)** und **(b)** gelten? Geben Sie solche Mengen an, falls sie existieren, oder erklären Sie wieso das nicht der Fall sein kann.

Aufgabe 15*:
Hilbertsches Hotel
Das Hilbertsche Hotel wird von David Hilbert geführt, der sich weniger durch seine Tätigkeit als Hoteldirektor als als Mathematiker einen Namen gemacht hat. Das Hotel hat eine einmalige Eigenart: Es hat (abzählbar) unendlich viele Zimmer. Die Zimmer sind mit den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$ durchnummeriert. Eines abends sind alle Hotelzimmer belegt doch unerwartet kommen noch weitere Zimmersuchende.
Ist es möglich durch Umquartieren der Gäste für die Neuankömmlinge Platz zu machen? Wie würde man das machen und wie die Neuankömmling verteilen?
Unterstützen Sie Hilbert in den folgenden Fällen:
(a) Ein einzelner neuer Gast kommt.

(b) Endlich viele Gäste kommen (n Gäste, mit $n \in \mathbb{N}$).

(c) Abzählbar unendlich viele Gäste kommen (abzählbar unendlich heißt hier, dass Sie davon ausgehen können, dass die Gäste mit $1, 2, 3, \dots$ durchnummeriert sind).

(d) Abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen Gäste kommen (hier haben sowohl die Busse als auch in jedem Bus die Gäste Nummern $1, 2, 3, \dots$).