Aufgaben und Lösungen zum Vorkurs Mathematik: Folgen, Reihen, Grenzwerte und Stetigkeit
Für Donnerstag den 29.9.2011

Aufgabe 1:
Finden Sie eine Formel für das n-te Glied a_n der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{5, 8, 11, 14, \ldots\}$,
(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 3, 9, 27, \ldots\}$,
(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 8, 27, 64, \ldots\}$,
(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \ldots\}$,
(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\}$.

Aufgabe 2:
Seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n := \frac{4}{n} + 2$ und $b_n := 1 - \frac{1}{n}$ gegeben.
(a) Konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und/oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und falls ja, gegen welchen Wert?
(b) Konvergiert die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und falls ja, gegen welchen Wert?

Aufgabe 3:
Zeigen Sie ob diese Folgen konvergieren. Wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{3n^2 + 1}{4n^2}$ **(b)** $b_n = (-5)^n$ **(c)** $c_n = \sqrt[n]{2}$

Aufgabe 4:
Betrachten Sie die Folge, die rekursiv gegeben ist durch:

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Finden Sie eine explizite Berechnungsformel, d.h. eine Formel, die aus n das Folgenglied a_n berechnet. (Vorgehen: Formel raten, dann mit vollständiger Induktion beweisen.)

Aufgabe 5:
Finden Sie ein Beispiel für zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das zeigt, dass der folgende Satz im Allgemeinen falsch ist.

Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen sind mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls.

Aufgabe 6:
(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine arithmetische Folge mit $a_7 = 13$ und $a_9 = 7$. Finden Sie eine Vorschrift für diese Folge.

(b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit $a_4 = 4$ und $b_6 = 36$. Finden Sie eine Vorschrift für diese Folge.

Aufgabe 7:
Beweisen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe (für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 8*:
Wir stellen uns eine andere Abstandsfunktion auf $\mathbb{R}$ vor: Der Abstand jeder Zahl zu sich selbst sei 0 und der Abstand zu jeder anderen Zahl 1. Welche Folgen konvergieren mit dieser Abstandsfunktion? Welche Reihen?

Aufgabe 9:
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte für $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x}{x^3+x^2-1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ hier sind $x, a \in \mathbb{R}^+$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+1}{x^3+x^2-7}$ **(d)** $\lim\limits_{x\nearrow-2} \dfrac{x^2+7x}{x+2}$ und $\lim\limits_{x\searrow-2} \dfrac{x^2+7x}{x+2}$

Aufgabe 10:
Für welche x sind die folgenden Funktionen stetig?
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 7x^2 + 3$
(ohne die Behauptung der Vorlesung *Polynome sind stetig* zu benutzen).
(b) $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(c) $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

(d*) $k : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ \dfrac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } \operatorname{ggT}(p,q) = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 11:
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass ein $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ existiert mit $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.