Aufgaben zum Vorkurs Mathematik: Beweismethoden
Für Mittwoch den 28.9.2011

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind etwas schwerer. Dort braucht man die richtige Idee, um die Lösung zu finden.

Aufgabe 1:
Zeigen Sie direkt die folgende Aussage über reelle Zahlen:

Wenn $x > 1$ so ist $6x + 3 > 3x + 6$.

Aufgabe 2*:
Zeigen Sie die Formel für die Summe der ersten $n \in \mathbb{N}$ natürlichen Zahlen direkt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie indirekt, dass, wenn das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade ist, so auch die Zahl selbst. Also

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2|n^2 \Rightarrow 2|n.$$

Aufgabe 4:
Zeigen Sie durch Widerspruch, dass

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

gilt.

Aufgabe 5:
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion folgende Formel für die Summe der ersten n Quadrate:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Aufgabe 6*:
Sei M eine Menge mit endlich vielen Elementen: $\#M = n, n \in \mathbb{N}_0$. Erinnern Sie sich an die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{A|A \subset M\}$, die Menge, die alle Teilmengen von M enthält (inklusive M und $\emptyset$).

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\#\mathcal{P}(M) = 2^n$$

Aufgabe 7:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: Alles was nicht rot ist, ist blau.

Beweis: Wir werden die Behauptung durch Widerspruch beweisen. Nehmen wir also die Negation der Behauptung an: Alles was rot ist, ist blau. Dies ist aber ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Farbe. Also kann die Annahme nicht gelten und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Aufgabe 8:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: Die Summe von zwei ganzen Zahlen ist Null.

Beweis: Zu zeigen ist also: $\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b = 0$. Seien also a und b beliebige ganze Zahlen und $c = a + b$ ihre Summe.

$$\begin{array}{rlcl}
 & a+b & = & c \\
\Leftrightarrow & ac+bc & = & c^2 \\
\Leftrightarrow & ac+bc+a^2+ab & = & c^2+a^2+ab \\
\Leftrightarrow & ac+bc+a^2+ab-c^2 & = & a^2+ab \\
\Leftrightarrow & c(a+b-c)+a^2+ab & = & a^2+ab \\
\Leftrightarrow & c(a+b-c)+a^2+ab-ac & = & a^2+ab-ac \\
\Leftrightarrow & c(a+b-c)+a(a+b-c) & = & a(a+b-c) \\
\Leftrightarrow & c+a & = & a \\
\Leftrightarrow & c & = & 0
\end{array}$$

$\square$

Aufgabe 9:
Finden Sie den Fehler in folgendem Beweis:

Behauptung: Ein Krokodil ist länger als breit.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung in zwei Schritten.

(1) Ein Krokodil ist länger als grün: Das Krokodil ist oben und unten lang, aber nur oben grün.

(2) Ein Krokodil ist grüner als breit: Das Krokodil ist grün entlang der Länge und der Breite, aber nur breit entlang der Breite.

Da das Krokodil nun länger als grün und grüner als breit ist, ist es länger als breit und die Behauptung ist bewiesen. $\square$