Aufgaben zum Vorkurs Mathematik: Analytische Geometrie
Für Dienstag den 4.10.2011

Aufgabe 1:
Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebenen Eigenschaften des euklidischen Skalarprodukts (Bilinearität, Symmetrie, positive Definitheit).

Aufgabe 2:
Finden Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 3, \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & 8x_3 & = & 3, \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 2. \end{array}$$

(d) Zu einem Gleichungssystem bilden wir zu jeder Variable einen Vektor, indem wir die in dem Gleichungssystem auftauchenden Koeffizienten der Variablen in einen Vektor schreiben. Im Fall a) erhalten wir also $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie für die Gleichungssysteme (a), (b) und (c) jeweils die so gebildeten Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe 3:
Finden Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -5 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3. \end{array}$$

Aufgabe 4:

(a) Konstruieren Sie eine Gerade, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ geht.

(b) Konstruieren Sie eine zur x_1-Achse parallele Gerade durch $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie, dass zwei Geraden $G : p + \lambda v$ und $H : q + \mu w$ im Raum $\mathbb{R}^3$ genau dann parallel oder identisch sind, wenn v und w linear abhängig sind.

(b) Seien u, v, w Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und sei E die von v und w aufgespannte Ebene durch den Ursprung. Zeigen Sie, dass u, v und w genau dann linear abhängig sind, wenn u in E liegt.

Aufgabe 6:

(a) Wo schneidet $g : \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die x_2-x_3-Ebene?

(b) Wo schneidet $h : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ die x_1-x_2-Ebene?

Aufgabe 7:

Sei E die durch $E : p + \lambda_1 v + \lambda_2 w$ gegebene Ebene, wobei $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ gelten.

(a) Liegen die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Ebene?

(b) Finden Sie ein x_1, sodass $\begin{pmatrix} x_1 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$ in der Ebene liegt.

(c) Bestimmen Sie eine Koordinatendarstellung von E.

(d) Lösen Sie a) und b) mittels Koordinatendarstellung.

Aufgabe 8:

Finden Sie eine möglichst einfache Formel für den Schnittwinkel γ einer Geraden G mit Richtungsvektor v und einer Ebene E mit Normalenvektor n.

Aufgabe 9:

Was haben G und H für eine Lage zueinander?

(a) $G : \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H : \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

(b) $G: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad H: \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix},$

(c) $G: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad H: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$

(d) $g: \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 10:

Finden Sie die Ebene, die parallel zur Ebene $5x_1 - 3x_2 + x_3 = 7$ ist und durch $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ geht.