Aufgaben zum Vorkurs Mathematik: Ableitungen und Integrale
Für Freitag den 30.9.2011

Aufgabe 1:
Finden Sie ein $x \in \mathbb{R}$ mit
(a) $\log_x 8 = 3$, **(b)** $\log_5 x = 2$, **(c)** $\log_x 1024 = 10$.

Aufgabe 2:
Beweisen Sie die folgende Aussage mittels vollständiger Induktion:
$(x^n)' = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3*:
Verwenden Sie den Differenzenquotienten, um die folgenden Ableitungen zu berechnen, wobei $x \in \mathbb{R}^+$ angenommen wird.
(a) $\sqrt{x}$, **(b)** $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 4:
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Berechnen Sie dort jeweils die Ableitungen.
(a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$,
(b) $f(x) = x\sqrt{x}$,
(c) $f(x) = |x|$.

Aufgabe 5:
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen, wobei $a, c \in \mathbb{R}$ beliebig sind und $b \in \mathbb{R}_0^+$ ist.
(a) $f(x) = \tan(x^2)$,
(b) $f(x) = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$,
(c) $f(x) = ((\sqrt{x} - a)(1 + \sqrt{x}))$.

Aufgabe 6:
Sei $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ eine Polynomfunktion, mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $p(x)$ überall differenzierbar ist und leiten Sie eine Formel für $p'(x)$ her.

Aufgabe 7:
Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
(a) $\log_4(x + 1) = -3$,
(b) $\frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(x+1)} = -1$,

(c) $x^{2x+1} = x$.

Aufgabe 8:
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

(b) $f(x) = \log(\log(x))$,

(c) $f(x) = x^x$.

Aufgabe 9:
Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in einem Punkt $x \in X$ differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass f in x stetig ist.

Aufgabe 10:
Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

Aufgabe 11:
Leiten Sie die Formel zur partiellen Integration her.

Aufgabe 12*:
Berechnen Sie die folgenden Integrale mit partieller Integration:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$,

b) $\int_1^e \log x \, dx$.

Aufgabe 13:
Leiten Sie die Substitutionsregel her.

Aufgabe 14:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ positiv. Die Punkte (x, y) auf einer *Ellipse* mit Halbachsen a und b sind gegeben durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(a) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, sodass alle Punkte (x, y) der Ellipse im 1. Quadranten auf dem Graph dieser Funktion liegen.

(b) Finden Sie die positive Nullstelle s der Funktion f.

(c) Berechnen Sie die Fläche zwischen diesem Graph und der x-Achse, indem Sie das Integral der Funktion von 0 bis s berechnen.

(d) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse.