Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 97-100 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 08.07.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 97:(*10 Punkte*)
Sei $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ der Hilbertraum mit der kanonischen Hilbertbasis (e_k) und (λ_k) eine Folge komplexer Zahlen. Auf dem Unterraum

$$V := \left\{(x_k) \in \ell^2 \,\middle|\, x_k \neq 0 \text{ nur für endlich viele } k\right\}$$

von ℓ^2 endlicher Summen $\sum x_k e_k$ sei

$$h : V \longrightarrow \ell^2, \quad \sum x_k e_k \longmapsto \sum \lambda_k x_k e_k$$

die lineare Abbildung mit $h(e_k) = \lambda_k e_k$.
Beweisen Sie, dass es genau dann eine stetige Abbildung $\hat{h} : \ell^2 \to \ell^2$ gibt mit $\hat{h}|_V = h$, wenn (λ_k) eine beschränkte Folge ist. Beweisen Sie außerdem, dass in diesem Fall die Operatornorm von h das Supremum der Menge $\left\{|\lambda_k| \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ ist.

Aufgabe 98:(*12 Punkte*)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig, falls man $\mathbb{R}$ als eine Vereinigung von disjunkten Intervallen I schreiben kann, so dass für jedes dieser I die eingeschränkte Funktion $f|_I$ stetig ist. Betrachten Sie den Raum V der stetigen 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zusammen mit dem Hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_n$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} n(x-2k\pi) & , \quad 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z} \\ n\frac{2\pi - x + 2k\pi}{2\pi n - 1} & , \quad 2k\pi + \frac{1}{n} < x < 2(k+1)\pi \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

eine Cauchyfolge in $(V, \langle ., .\rangle)$ ist. Geben Sie eine stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$$

ist. Folgern Sie, dass $(f_n)_n$ in $(V, \langle ., .\rangle)$ keinen Grenzwert hat.

(bitte wenden)

Aufgabe 99:(*8 Punkte*)
Beweisen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische ungerade Funktion, so gilt für das n-te Fourier-Polynom $S_n(f)$:

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

Aufgabe 100:(*10 Punkte*)
Berechnen Sie die Fourierreihe der folgenden Treppenfunktion:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & , \quad 2n\pi \leq x < (2n+1)\pi \text{ für } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \quad (2n+1)\pi \leq x < (2n+2)\pi \text{ für } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$