Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 93-96 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 01.07.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 93:(*10 Punkte*)
Wenden Sie das Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren auf das Differentialgleichungssystem

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ an. Führen Sie die ersten drei Schritte aus.

Aufgabe 94:(*10 Punkte*)
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 95:(*10 Punkte*)
Betrachten Sie die folgende Bernoullische Differentialgleichung:

$$x' = \frac{1}{-2t} x + (t^2 - t)x^3$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und alle möglichen Anfangswerte $x(1) = x_0$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der maximalen Lösung in Abhängigkeit von x_0.

Aufgabe 96:(*10 Punkte*)
Betrachten Sie das Vektorfeld

$$V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (y, x).$$

Bestimmen Sie alle maximalen (das heißt in diesem Fall für alle t$\in \mathbb{R}$ definierten) Integralkurven und beweisen Sie, dass für jede Integralkurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Konstante $c \in$ existiert, so dass die Gleichung

$$x^2(t) - y^2(t) = c$$

gilt.