Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 89-92 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 24.06.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 89:(*6+6 Punkte*)
Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen:

$$x' = 2x + t + \sin(t), \quad x' = \frac{t}{t^2+1}x + (t+1)^2$$

Aufgabe 90:(*8 Punkte*)
Geben Sie alle Integralkurven $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Vektorfelds

$$V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (1, \sqrt{|x|})$$

in Abhängigkeit von der Anfangsbedingung $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ an.

Aufgabe 91:(*10 Punkte*)
Sei $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Beweisen Sie, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist:

$$3t^3\sqrt{t^4+1}(\ln x + 2) + \frac{1}{2x}\sqrt{(t^4+1)^3}x' = 0$$

Bestimmen Sie die Potentialfunktion

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \longmapsto F(t, x),$$

und bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 92:(*2+3+5 Punkte*)
Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$x' = \frac{1}{t}x - e^{-t}x^2 + \frac{2t-1}{t}e^t, \quad t \in (0, \infty) \tag{1}$$

a) Beweisen Sie, dass $t \mapsto e^t$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist.

b) Beweisen Sie: Wenn u eine Lösung von (1) ist, dann ist $y = u - e^t$ eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' = \left(\frac{1}{t} - 2\right) y - e^{-t}y^2.$$

c) Geben Sie die allgemeine Lösung von (1) an.
(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabenteil (a) und (b).)

Dpt. Mathematik, AD · Geom. 216 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde