Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 81-84 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 03.06.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 81:(*10 Punkte*)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$E_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}$$

genau dann eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist, wenn

$$\lambda \neq 0, 1$$

gilt.

Aufgabe 82:(*5+4 Punkte*)
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1.$$

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass für eine kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ genau eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

existiert, die die Gleichungen

$$f(t, g(t)) = 0, \quad \text{und} \quad g(-1) = 0$$

erfüllt.

b) Bestimmen Sie $g'(-1)$.

Aufgabe 83:(*8 Punkte*)
Die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist die Menge

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Beweisen Sie, dass

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, \quad (x, y) \longmapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)$$

ein Homöomorphismus mit der Umkehrabbildung

$$F^{-1} : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

ist.

Aufgabe 84:(*7+6 Punkte*)
Wir identifizieren $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^4$. Sei $A \in \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{R})$ und

$$\Phi_A : \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}), \quad T \longmapsto T \cdot A \cdot T^{-1}.$$

a) Beweisen Sie, dass Φ_A für alle $A \in \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{R})$ eine Abbildung von konstantem Rang ist.
(Hinweis: Benutzen Sie, dass

$$\Phi_A(T_0 \cdot T) = T_0 \cdot \Phi_A(T) \cdot T_0^{-1}$$

ist für $T_0 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.)

b) Sei

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von $d\Phi_A|_{E_2}$ für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b \neq 0.$$