Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 77-80 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 27.05.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 77:(*10 Punkte*) (Zentralfelder sind wirbelfrei)
Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \longmapsto \frac{f(\| x \|)}{\| x \|} x$$

die Bedingung $\mathrm{rot}(v) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 78:(*10 Punkte*)
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2.$$

Ein kritischer Punkt von f ist ein Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{grad}(f)(x,y) = 0$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f, entwickeln Sie f um jeden kritischen Punkt in ein Taylorpolynom zweiten Grades und bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f.

Aufgabe 79:(*10 Punkte*)
Sei $(V, \| \,.\, \|_\infty)$ der Banachraum der beschränkten Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 67. Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Abbildung

$$\psi : V \longrightarrow V, \quad f \longmapsto \cos \circ f$$

einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 80:(*5+5 Punkte*)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit:

a)

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, \sin(\cos(y)))$$

b)

$$f(x,y) = (x + y^3, e^x)$$

Bestimmen Sie die Menge S_f der Stellen, an denen f lokal kein diffeomorphismus ist. Berechnen Sie das (totale) Differential einer Umkehrfunktion in $f(x,y)$, falls $(x,y) \notin S_f$ ist. Ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus S_f$ global umkehrbar?

Dpt. Mathematik, AD · Geom. 216 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde