Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 73-76 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 20.05.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 73:(*5+5 Punkte*)
Berechnen Sie den Gradienten von $f \circ g$ für die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \longmapsto \ln(x) + y^3 + z$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \longmapsto \big(\exp(x + y), x^2 + y, y \sin^2(x)\big)$$

auf zwei verschiedene Weisen:

a) Berechnen Sie $f \circ g$ und bestimmen Sie dann den Gradienten.

b) Wenden Sie die Kettenregel an.

Aufgabe 74:(*10 Punkte*) (Lie-Algebra von $\mathrm{O}(n)$)
Wir fassen $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ als eine Untermenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ auf. Es sei $\varepsilon > 0$ und die Abbildung $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{O}(n)$ sei differenzierbar. Außerdem sei $A(0) = \mathbb{1}_n$ und es sei

$$B = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} A.$$

Beweisen Sie, dass dann $B^t = -B$ gilt.

Aufgabe 75:(*10 Punkte*)
Es bezeichne Δ den Laplace-Operator. Jeder Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ läßt sich in den Polarkoordinaten r, φ darstellen, wobei wir $\Phi : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vermöge

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = (x, y)$$

haben. Beweisen Sie:

$$(\Delta f) \circ \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (f \circ \Phi)$$

(Hinweis: Wenden Sie die Kettenregel auf $(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ an.)

Aufgabe 76:(*5+5 Punkte*) (Harmonische Funktionen aus Kugelflächenfunktionen)
Ähnlich zu Aufgabe 75 kann man jeden Punkt in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ in Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

darstellen. Der Laplace-Operator hat in Kugelkoordinaten die Gestalt

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die

$$f(x, y, z) = g(r) \cdot h(\varphi, \theta)$$

für $(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$ erfüllt.

a) Beweisen Sie, dass f genau dann harmonisch ist, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r}\right) = \lambda g \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial h}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2} = -\lambda h$$

gilt.

b) Beweisen Sie, dass

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = g(r) \cdot h(\varphi, \theta)$$

mit

$$g(r) = ar + \frac{b}{r^2}, \quad h(\varphi, \theta) = \sin(\theta)\cos(\varphi), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

harmonisch ist.