Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 69-72 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 13.05.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 69:(*11 Punkte*)
Betrachten Sie den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{R})$. Der Hilbertwürfel $W \subset \ell^2(\mathbb{R})$ ist die Menge der Folgen $(a_n)_n \in \ell^2$ mit
$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}.$$
Beweisen Sie, dass jede Folge in W eine konvergente Teilfolge hat.
(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß für die Komponentenfolgen und ein Diagonalargument.)

Aufgabe 70:(*3+4+4 Punkte*)
Berechnen Sie die Gradienten der folgenden Funktionen:

a)
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto x^4 + xy^3 + x^2y^2 + x^2y + x + y + 2$$

b)
$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \longmapsto \sin\left(\frac{z}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

c)
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto (x^2 + 1)^y$$

Aufgabe 71:(*8 Punkte*)
Hier wird eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als ein homogenes Polynom vom Grad d bezeichnet, wenn es $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k y^{d-k}$$
gilt. Beweisen Sie, dass ein homogenes Polynom vom Grad 3 genau dann harmonisch ist, wenn
$$3a_0 + a_2 = a_1 + 3a_3 = 0$$
gilt.

Aufgabe 72:(*2+5+3 Punkte*)
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld mit
$$v_\lambda(x, y) = (1, \lambda \cdot y)$$

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld v_1.

b) Der Fluss von v_λ ist eine Abbildung $\Phi_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die

$$\partial_t \Phi_\lambda(t, (x, y)) = v_\lambda(\Phi_\lambda(t, (x, y)))$$

mit der Anfangsbedingung

$$\Phi_\lambda(0, (x, y)) = (x, y)$$

erfüllt. Bestimmen Sie Φ_λ.

c) Beweisen Sie:

$$\operatorname{div}(v_\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$$