Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Jan Christian Rohde

Übungsaufgaben 64-65 zur Abgabe zu Beginn der Vorlesung am 29.04.2011.
Sie können die Lösungen in Zweiergruppen erstellen. Alle Personen müssen dann aber der gleichen Übungsgruppe angehören.

Aufgabe 64:(*6+4+9+6 Punkte*)
Betrachten Sie $\mathbb{C}^2$ mit der hermiteschen Form

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

und der zugehörigen unitären Gruppe $\mathrm{U}(2) \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Außerdem sei $\mathrm{SU}(2)$ die Untergruppe der Automorphismen $M \in \mathrm{U}(2)$ mit $\det(M) = 1$.

a) Beweisen Sie:

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

b) Sei

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

Wir betrachten $\mathbb{H}$ mit der eingeschränkten Skalarmultiplikation als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Seien

$$V_1 = \{A \in \mathbb{H} \mid \bar{A}^t = A\} \quad \text{und} \quad V_2 = \{A \in \mathbb{H} \mid \bar{A}^t = -A\}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{H} = V_1 \oplus V_2$$

gilt und V_2 über $\mathbb{R}$ die Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)$$

hat.

c) Beweisen Sie, dass für alle $M \in \mathrm{SU}(2)$ die Abbildung

$$\psi_M : V_2 \longrightarrow V_2, \quad A \longmapsto M \cdot A \cdot M^{-1}$$

ein wohldefinierter Vektorraumautomorphismus ist. Dabei ist unter anderem zu beweisen, dass man $\psi_M(V_2) \subseteq V_2$ für alle $M \in \mathrm{SU}(2)$ erhält.

d) Sei $(.,.)$ das euklidische Skalarprodukt auf V_2 mit der Orthonormalbasis B. Beweisen Sie, dass man einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{O}(V_2, (.,.)), \quad M \longmapsto \psi_M$$

hat. Dabei ist auch zu beweisen, dass $\psi_M \in \mathrm{O}(V_2,(.,.))$ für alle $M \in \mathrm{SU}(2)$ gilt. Sie dürfen hierfür benutzen, dass genau dann $\psi_M \in \mathrm{O}(V_2,(.,.))$ gilt, wenn

$$\|\,\psi_M(A)\,\| = \|\,A\,\|$$

für die von $(.,.)$ induzierte Norm $\|\,A\,\| = \sqrt{(A,A)}$ gilt.
(Hinweis: Beweisen Sie, dass die Norm $\|\,.\,\|$ auf V_2 durch $A \mapsto \sqrt{|\det(A)|}$ gegeben ist.)

Dpt. Mathematik, AD · Geom. 216 · jan.christian.rohde@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/j.c.rohde

Aufgabe 65:(*5+6+4 Punkte*)
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei A die obige darstellende Matrix bezeichnet. Der Endomorphismus F hat die Eigenwerte 0 und 2 mit den jeweiligen Eigenvektoren

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Finden Sie einen Vektor v_1, so dass F bezüglich der Basis (v_0, v_1, v_2) die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat.

b) Finden Sie ein $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, so dass $TAT^{-1} = M$ ist.

c) Berechnen Sie $\exp(A)$.